

Abschnitt IV

Der physikalische Aufbau der Erde

von B. Gutenberg, Pasadena (Calif.)

Kapitel 13

Grundlagen aus der Elastizitätstheorie¹⁾

§ 144. **Volumenänderung.** Wir betrachten zwei benachbarte Punkte P und P' in einem vollständig elastischen Körper. Ihre Koordinaten (Fig. 146) seien

$$\begin{array}{llll} x & y & z & \text{für } P \\ \text{bzw. } x + \Delta x & y + \Delta y & z + \Delta z & \text{für } P'. \end{array}$$

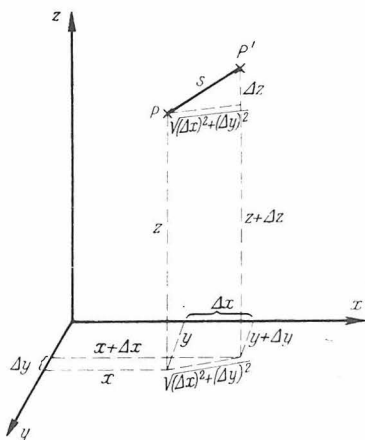


Fig. 146

Der Punkt P führe nun eine Bewegung aus, die Verrückungen hierbei seien

$$u \text{ (} \parallel x\text{-Achse) } \quad v \text{ (} \parallel y\text{-Achse) } \quad w \text{ (} \parallel z\text{-Achse);}$$

dann verschiebt sich P' gleichzeitig um:

$$\left. \begin{array}{l} \parallel x\text{-Achse: } u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \parallel y\text{-Achse: } v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \parallel z\text{-Achse: } w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{array} \right\} \dots (77)$$

¹⁾ Literatur: A. E. H. LOVE, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. TIMPE, Leipzig 1907.

Die Differenz $u' - u$ der Verrückungskomponenten von P' und P sind klein, ebenso $v' - v$ und $w' - w$, und wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= u' - u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \Delta v &= v' - v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \Delta w &= w' - w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \right\} \dots \dots (78)$$

Die Entfernung zwischen P und P' ist vor der Deformation:

$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \dots \dots \dots (79)$$

Die Koordinaten der Punkte sind nach der Deformation

$$\begin{array}{lll} \text{von } P : & x + u & y + v & z + w \\ \text{von } P' : & x + \Delta x + u + \Delta u & y + \Delta y + v + \Delta v & z + \Delta z + w + \Delta w. \end{array}$$

Die Entfernung zwischen P und P' wird also nach der Deformation:

$$\begin{aligned} s' &= s + \Delta s = \sqrt{(\Delta x + \Delta u)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta w)^2} \\ &= \sqrt{s^2 + 2(\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w) + \dots \text{Glieder h\"oherer Ordnung}} \\ &= s \sqrt{1 + \frac{2}{s^2} (\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w) + \dots} \\ &= s \left[1 + \frac{1}{s^2} (\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w) + \dots \right], \end{aligned}$$

da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nur wenig von 1 verschieden ist. Wir erhalten also unter Vernachl\"assigung der Glieder h\"oherer Ordnung

$$\Delta s = \frac{1}{s} (\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w) \dots \dots \dots (80)$$

Legt man das Koordinatensystem so, da\ss PP' parallel der x -Achse liegt, so wird

$$\Delta x = s \quad \Delta y = 0 \quad \Delta z = 0 \quad \Delta s = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \text{ (nach 78)} \dots (81)$$

Analoges gilt f\"ur Strecken parallel den anderen Achsen. Betrachtet man ein Prisma mit den Seiten Δa parallel der x -Achse, Δb parallel der y -Achse, Δc parallel der z -Achse, so werden diese nach der Deformation:

$$\Delta a + \Delta a \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \Delta b \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \Delta c \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Das urspr\"ungliche Volumen

$$V = \Delta a \Delta b \Delta c$$

geht \u00fcber in

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= \Delta a \Delta b \Delta c \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= V + V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \dots \end{aligned}$$

Die **Volumenänderung** der Volumeneinheit, die wir mit Θ bezeichnen wollen, ergibt sich somit aus:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots \quad (82)$$

Eine Skalargröße, die mittels dieser Formel aus einem Vektor abgeleitet ist, wird als **Divergenz** des Vektors bezeichnet. Man schreibt

$$\Theta = \text{div } (u, v, w) \quad \dots \quad (83)$$

Diese Beziehung ist von den Koordinaten unabhängig und läßt sich wie folgt ausdrücken: Es möge irgendeine geschlossene Fläche S in dem Vektorfelde beschrieben werden, und es bezeichne N die Projektion des Vektors auf die nach außen gerichtete Normale in einem Punkte von S , ferner $d\tau$ irgendein Volumenelement innerhalb S , dann ist

$$\iint N dS = \iiint \Theta d\tau \quad \dots \quad (84)$$

wo sich das Integral links über die Oberfläche S , das Integral rechts auf den Raum innerhalb S erstreckt.

§ 145. **Verschiebung.** Wir betrachten nunmehr die Lagenänderung der Strecke $PP' = \Delta x$, die wir parallel der x -Achse annehmen wollen, nach der Verschiebung. Die Koordinaten sind:

Vor der Deformation				Nach der Deformation			
P :	x	y	z	P_1	$x + u$	$y + v$	$z + w$
P' :	$x + \Delta x$	y	z	P'_1	$x + \Delta x + u + \Delta u$	$y + v + \Delta v$	$z + w + \Delta w$

Die Projektionen von $P_1 P'_1$ auf die drei Koordinatenachsen sind:

$$\text{oder nach (81):} \quad \Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Delta x \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Bezeichnen wir die Winkel, die $P_1 P'_1$ mit den drei Achsen bildet, mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so wird unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\cos \alpha_1 = 1 \quad \cos \beta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \cos \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots \quad (85a)$$

Analog ergibt sich für die Winkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, welche Strecken, die ursprünglich parallel der y - bzw. z -Achse waren, nach der Deformation mit diesen Achsen bilden,

$$\cos \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \cos \beta_2 = 1 \quad \cos \gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots \quad (85b)$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \cos \beta_3 = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \cos \gamma_3 = 1 \quad \dots \quad (85c)$$

Wir wenden diese Ergebnisse auf ein Prisma an, dessen Seiten ursprünglich parallel den Achsen waren; die Winkel zwischen den Kanten, die ursprünglich

$\frac{\pi}{2}$ waren, mögen nach der Deformation $\left(\frac{\pi}{2} - 2 \varphi_{xz}\right)$ bzw. $\left(\frac{\pi}{2} - 2 \varphi_{yz}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2} - 2 \varphi_{xy}\right)$ sein. Nach einem Satze der Trigonometrie ist dann

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2 \varphi_{xz}\right) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3.$$

Setzt man die Werte aus (85a) bis (85c) ein und vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, so erhält man die Änderungen der Prismenwinkel:

$$\left. \begin{aligned} 2 \varphi_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ 2 \varphi_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 2 \varphi_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (86)$$

§ 146. Die Definitionsgleichungen für die elastischen Konstanten. Die Größe der Volum- und Formänderung eines Prismas hängt von dessen elastischen Konstanten ab; jede der beiden Größen ist durch eine Konstante bestimmt. Es werden jedoch zur Vereinfachung der Beziehungen verschiedene Moduln verwandt, die sich je paarweise durch die andern ausdrücken lassen. Geht man von der Längenausdehnung eines kleinen Zylinders mit dem Querschnitt q (Durchmesser d) und der Länge \mathfrak{L} aus, so zeigt die Beobachtung, daß bei kleinen Werten eines Zuges F , der auf q wirkt, die Längenänderung $\Delta \mathfrak{L}$ proportional der Länge und dem Zug F pro Flächeneinheit wird. Sei $1 : E$ der Proportionalitätsfaktor, sei ferner p die Zugkraft, die auf q wirkt, so wird

$$\Delta \mathfrak{L} = \frac{1}{E} \mathfrak{L} \cdot F = \frac{1}{E} \mathfrak{L} \cdot \frac{p}{q} \quad E = \frac{\mathfrak{L}}{\Delta \mathfrak{L}} \cdot \frac{p}{q} \dots \dots \dots (87)$$

E heißt der Youngsche Modul.

Bei der Dehnung wird gleichzeitig der Querschnitt q verkleinert. Die Beobachtung zeigt, daß innerhalb gewisser Grenzen das Verhältnis $(\Delta d : d)$ der Querkontraktion zur Längendilatation $(\Delta \mathfrak{L} : \mathfrak{L})$ für ein bestimmtes Material eine Konstante ist, die als „Poissonsche Konstante“ σ bezeichnet wird

$$\sigma = \frac{\Delta d : d}{\Delta \mathfrak{L} : \mathfrak{L}} \dots \dots \dots (88)$$

Wirken auf ein kleines Prisma paarweise die Spannungen N_1, N_2, N_3 (Fig. 147), so ergibt sich für eine Strecke parallel der x -Achse pro Längeneinheit

nach (87) die Verlängerung durch N_1	$N_1 : E$
nach (87) und (88) die Querkontraktion durch N_2	$-\sigma N_2 : E$
Desgl. durch N_3	$-\sigma N_3 : E$

(unter Voraussetzung von Isotropie).

Die Längenänderung der Kante Δx ist also

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta x \left[\frac{N_1}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_2 + N_3) \right].$$

Hieraus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{N_1 - \sigma(N_2 + N_3)}{E}, \text{ analog} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{N_2 - \sigma(N_1 + N_3)}{E} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{N_3 - \sigma(N_1 + N_2)}{E} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

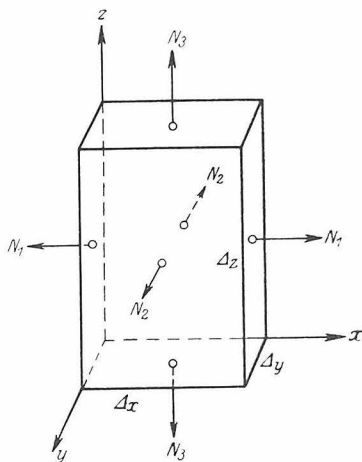


Fig. 147

Die Volumänderung Θ des Prismas wird also [vgl. (82)]:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \left[N_1 + N_2 + N_3 - 2\sigma(N_1 + N_2 + N_3) \right] \\ &= \frac{1 - 2\sigma}{E} (N_1 + N_2 + N_3) \\ N_1 + N_2 + N_3 &= \frac{E \Theta}{1 - 2\sigma} \dots \dots \dots (90) \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (89) läßt sich auch schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N_1(1 + \sigma) - \sigma(N_1 + N_2 + N_3)}{E} = \frac{1}{E} \left(N_1(1 + \sigma) - \frac{\sigma E \Theta}{1 - 2\sigma} \right) \text{ (nach 90).}$$

Hiernach ist

$$N_1 = \frac{E}{1 + \sigma} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Theta \dots \dots \dots (90a)$$

Zur Abkürzung führte LAMÉ zwei neue Konstanten (**LAMÉsche Konstanten**) λ und μ ein:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma} \dots \dots \dots (91)$$

Die Gleichung (90a) (bzw. die beiden analogen für N_2 und N_3) erhält dann die Form:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ N_3 &= \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92)$$

E und σ ergeben sich aus λ und μ (nach 91) aus

$$E = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (3 \lambda + 2 \mu) \qquad \sigma = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \dots \dots \dots (91a)$$

Außer diesen Konstanten wird noch eine weitere Größe k , der „Inkompressibilitätsfaktor“ (weniger gut: „Kompressionsmodul“) benutzt. Läßt man auf das Prisma einen allseitigen Druck $p = N_1 = N_2 = N_3$ wirken, so ist nach (92)

$$\begin{aligned} \Sigma N &= -3 p = 3 \lambda \Theta + 2 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \Theta (3 \lambda + 2 \mu) \\ p &= - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Theta = k \Theta, \quad \text{wo} \quad k = - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \dots \dots (93) \end{aligned}$$

Je größer k ist, desto kleiner ist Θ , desto inkompressibler ist also der Körper. Aus (93 und 91) ergibt sich

$$k = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2 \sigma} \dots \dots \dots (93a)$$

Wir müssen uns nun noch die Bedeutung der Größe μ klarmachen. Auf ein Prisma (Fig. 148 und 149) wirken die Dehnungskräfte K . Dabei geht das Recht-

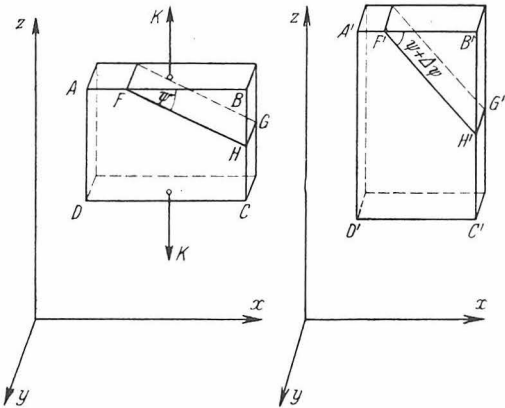


Fig. 148

Fig. 149

eck $ABCD$ in das Rechteck $A'B'C'D'$ über, die Fläche HFB gleichzeitig in $H'F'B'$ und der Winkel $\psi = BFH$ in $\psi + \Delta \psi = B'F'H'$. Auf die Fläche FHG wirkt die Kraft $K \cdot \cos \psi$.

Die Spannung in Richtung FH („Tangentialspannung“ T) ist

$$T = K \cos \psi \sin \psi \dots \dots \dots (94)$$

Die Verlängerung von AD ist $K : E$ pro Längeneinheit, die Verkürzung von AB wird $\sigma K : E$. Es ist also:

$$\begin{aligned} A'B' &= AB \left(1 - \frac{\sigma K}{E}\right), & B'F' &= BF \left(1 - \frac{\sigma K}{E}\right), \\ A'D' &= AD \left(1 + \frac{K}{E}\right), & B'H' &= BH \left(1 + \frac{K}{E}\right), \end{aligned}$$

also nach Fig. 149:

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \frac{B'H'}{B'F'} = \frac{BH \left(1 + \frac{K}{E}\right)}{BF \left(1 - \frac{\sigma K}{E}\right)} = \operatorname{tg} \psi \frac{1 + \frac{K}{E}}{1 - \frac{\sigma K}{E}}.$$

Da $\Delta\psi$, $K:E$ und $\sigma K:E$ kleine Größen sind, wird einerseits

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \operatorname{tg} \psi + \frac{\Delta\psi}{\cos^2 \psi},$$

andererseits

$$\left(1 + \frac{K}{E}\right) : \left(1 - \frac{\sigma K}{E}\right) = 1 + \frac{K}{E} + \sigma \frac{K}{E} = 1 + \frac{K}{E} (1 + \sigma),$$

also

$$\frac{\Delta\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{K}{E} (1 + \sigma) \operatorname{tg} \psi, \quad \Delta\psi = \frac{K}{E} (1 + \sigma) \sin \psi \cos \psi = \frac{1 + \sigma}{E} T$$

nach (94): oder nach (91):

$$T = \mu \cdot 2 (\Delta\psi) \quad (95)$$

Je größer μ ist, desto größer sind die Tangentialspannungen, die bei einer bestimmten Scherung ($\Delta\psi$) auftreten, d. h. μ ist charakteristisch für den Widerstand, den das Prisma Scherungen (einer Torsion) entgegensetzt. Man bezeichnet daher μ als **Scherungsmodul**, **Torsionsmodul**, Modul der Formelastizität oder **Righeitsfaktor**. (Rig = widerstandsfähig gegen Scherungen). Bezeichnen wir die Scherungswinkel der drei Prismenseiten gegeneinander wieder mit φ_{xz} , φ_{yz} , φ_{xy} , so geht unter Benutzung des Systems (86) die Gleichung (95) über in:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ T_2 &= T_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ T_3 &= T_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Wir haben also folgende *wichtige Moduln* zu unterscheiden:

den *Dehnungsmodul* (YOUNG'scher Modul) E ,
die *POISSON'sche Konstante* (Querkontraktion: Längendilatation) σ ,
die *LAMÉ'schen Konstanten* λ und μ (*Righeitsfaktor*),
den *Inkompressibilitätsfaktor* k .

Zwischen ihnen bestehen u. a. folgende *Beziehungen* (nach 91 und 93):

$$E = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (3\lambda + 2\mu) = 3k(1 - 2\sigma) = 2\mu(1 + \sigma) = \frac{k}{\frac{k}{3\mu} + \frac{1}{9}} \quad (97)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{3k - E}{6k} = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{\mu}{k}}{2 + \frac{2}{3} \frac{\mu}{k}} \quad (98)$$

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} = 3k \frac{\sigma}{1 + \sigma} = k - \frac{2}{3}\mu \quad \dots \quad (99)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma} = \frac{3k}{2} \frac{1 - 2\sigma}{1 + \sigma} = \frac{3}{2}(k - \lambda) \quad \dots \quad (100)$$

$$k = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\sigma} = \frac{2\mu}{3} \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \dots \quad (101)$$

Außer diesen Größen werden manchmal noch weitere benutzt¹⁾.

§ 147. Die Verdrillung. Bei einer Störung des Gleichgewichtes bewege sich der Punkt M (Fig. 150) nach M_1 .

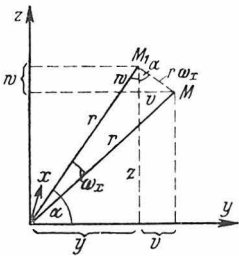


Fig. 150

Nach der Figur ist dann

$$\begin{aligned} z &= r \sin \alpha & y &= r \cos \alpha \\ v &= -r \omega_x \sin \alpha = -z \omega_x \\ w &= +r \omega_x \cos \alpha = y \omega_x \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\omega_x & \frac{\partial w}{\partial y} &= +\omega_x \end{aligned}$$

analog

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (102)$$

Eine Vektorgröße, die durch das hier angegebene Verfahren (102) aus einem anderen Vektor abgeleitet ist, wird als „Curl“ des anderen Vektors bezeichnet. Es sind hierfür zwei Schreibweisen üblich, ohne daß damit irgendein Unterschied verbunden ist:

$$\text{entweder: } 2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \text{curl}(u, v, w) \quad \dots \quad (103)$$

$$\text{oder: } 2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \text{rot}(u, v, w) \quad \dots \quad (104)$$

Auch dieser Ausdruck ist wie (82) von den Koordinaten unabhängig. Die Beziehung läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Es möge irgendeine geschlossene Kurve s in dem Vektorfelde gezogen und irgendeine Fläche S in der Weise beschrieben werden, daß sie die Kurve s als Rand hat. Wenn ferner T die Komponente des Vektors (u, v, w) längs der Tangente in einem Punkte von s , ferner

¹⁾ Vgl. z. B. AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, 3, 52, Leipzig, 1927.

$2 \omega_r$, die Projektion des Vektors $2 (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ auf die Normale in einem Punkte von S ist, so ist

$$\int T ds = \iint 2 \omega_r dS \quad (105)$$

wo die Integration rechts über die Fläche S , links längs der Kurve s vorzunehmen ist.

Eine Verzerrung, bei der die Größen $\omega = 0$ sind, bezeichnet man als „*reine Verzerrung*“ (pure strain), die entsprechende Verschiebung als „*rotationsfrei*“.

§ 148. Das Gleichgewicht in einer Kugel. Wirkt auf einen ursprünglich kräftefreien Körper, der sich im Gleichgewicht befand, ein Kraftfeld ein, und sind X, Y, Z die Komponenten der Feldstärke in einem Punkte, $m = \rho d\tau$ die Masse eines Volumenelementes $d\tau$ mit der Dichte ρ , so sind mX, mY und mZ die Feldkräfte, die auf das Teilchen wirken. Herrscht Gleichgewicht, so müssen folgende Spannungsgleichungen erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} &= -\rho X \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} &= -\rho Y \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} &= -\rho Z \end{aligned} \right\} (106)$$

Setzen wir hierin die Werte für die Spannungen aus (92) und (96) ein, so finden wir

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} (107)$$

wo nach (82)

$$\Theta = \operatorname{div} (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

und zur Abkürzung

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Führen wir die Rotation (Curl) ein (vgl. 104):

$$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} (u, v, w) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (108)$$

und machen Gebrauch von der Identität

$$\nabla^2 u = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2 \operatorname{rot} \omega_x, \text{ analog für } v \text{ und } w,$$

so kann das System (107) geschrieben werden

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Theta - 2\mu \operatorname{rot} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) + \rho (X, Y, Z) = 0 \quad (109)$$

Für Probleme, welche die Kugel betreffen, empfiehlt sich die *Einführung von Polarkoordinaten* r, Λ, Φ .

Sind α , β und γ Parameter eines Systems krummliniger Koordinaten, die bestimmt sind durch Flächen, die sich überall rechtwinklig schneiden, so ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)^2 \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 \\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (111)$$

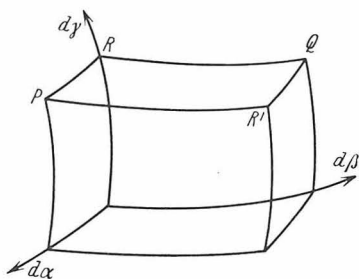


Fig. 151

so sind die Richtungscosinus der Normalen zu α im Punkte x, y, z

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

und analog für β und γ . Um den Ausdruck für Θ zu erhalten, bilden wir das Oberflächenintegral der Normalkomponente der Verschiebung über die Oberfläche eines Volumenelementes, das von den drei Flächenpaaren $(\alpha; \alpha + d\alpha)$, $(\beta; \beta + d\beta)$, $(\gamma; \gamma + d\gamma)$ begrenzt wird; dabei sei die Normale vom Innern des Elementes weg gerichtet. Die Anteile der Seitenflächen des Elementes lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Anteil von } \alpha &= -u_\alpha \frac{d\beta}{h_2} \frac{d\gamma}{h_3} \\ \text{Anteil von } (\alpha + d\alpha) &= u_\alpha \frac{d\beta}{h_2} \frac{d\gamma}{h_3} + d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u_\alpha \frac{d\beta}{h_2} \frac{d\gamma}{h_3} \right) \end{aligned}$$

und analog für β und γ . Addieren wir die sechs Anteile, so erhalten wir

$$d\alpha d\beta d\gamma \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\gamma}{h_1 h_2} \right) \right\}.$$

Dies muß identisch sein mit

$$\Theta \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{h_1 h_2 h_3}.$$

Wir haben also

$$\Theta = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\gamma}{h_1 h_2} \right) \right\} \quad (112)$$

Um den Ausdruck für $2 \omega_\gamma$ zu erhalten, bilden wir das Linienintegral der Tangentialkomponente der Verschiebung längs der Umrandung des Elementes in der Fläche $\gamma + d\gamma$. Die Anteile der vier Stücke des Randes lassen sich mit Hilfe von Fig. 151 folgendermaßen hinschreiben:

$$\begin{aligned} \text{Anteil von } RP &= u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1} \\ \text{,, , } R'Q &= -u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1} - d\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1} \right) \\ \text{,, , } QR &= -u_\beta \frac{d\beta}{h_2} \\ \text{,, , } PR' &= u_\beta \frac{d\beta}{h_2} + d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u_\beta \frac{d\beta}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Addieren wir diese Anteile, so erhalten wir

$$d\alpha d\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_1} \right) \right\}.$$

Dies muß identisch sein mit $2 \omega_\gamma \frac{d\alpha d\beta}{h_1 h_2}$. Wir erhalten hieraus ω_γ und analog ω_α und ω_β

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_\alpha &= h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\gamma}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\beta}{h_2} \right) \right\} \\ 2\omega_\beta &= h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{h_3} \right) \right\} \\ 2\omega_\gamma &= h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Die in Dilatation und Rotation ausgedrückten Gleichungen (109) lassen sich leicht transformieren, wenn wir den vektoriellen Charakter der einzelnen Glieder beachten. Die Glieder $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Theta$ können wir lesen „Gradient von Θ “ und können dann die Gleichungen (109) so aussprechen:

$$(\lambda + 2\mu) (\text{Gradient von } \Theta) - 2\mu (\text{Curl von } \omega) + \rho (\text{Massenkraft}) = 0 \quad (114)$$

Nun ist der Gradient von Θ der Vektor, dessen Komponente in irgendeiner Richtung gleich der Zunahme von Θ pro Längeneinheit in dieser Richtung ist. Demgemäß sind die Komponenten dieses Vektors in den Richtungen der Normalen der drei Flächen α, β, γ gleich

$$h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}, \quad h_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}, \quad h_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma}.$$

Die Gleichungen (109) lauten dann

$$(\lambda + 2\mu) h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} - 2\mu h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\omega_\gamma}{h_3} \right) + 2\mu h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\omega_\beta}{h_2} \right) + \rho F_\alpha = 0 \quad (115)$$

und analog für β und γ , wo $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ die Komponenten der Massenkraft in Richtung der Normalen der drei Flächen bedeuten.

Gehen wir nun speziell zu Polarkoordinaten über, so haben wir zu setzen

$$\alpha = r \qquad \beta = \Lambda \qquad \gamma = \Phi.$$

die Verschiebungen sind u_r, u_Λ, u_Φ , und wir erhalten für die Volumänderung Θ und die Drehungen $\omega_r, \omega_\Lambda, \omega_\Phi$ aus (112) bzw. (113)

$$\Theta = \frac{1}{r^2 \sin \Lambda} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \Lambda) + \frac{\partial}{\partial \Lambda} (r u_\Lambda \sin \Lambda) + \frac{\partial}{\partial \Phi} (r u_\Phi) \right] \quad (116)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \omega_r &= \frac{1}{r^2 \sin \Lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \Lambda} (r u_\Phi \sin \Lambda) - \frac{\partial}{\partial \Phi} (r u_\Lambda) \right] \\ 2 \omega_\Lambda &= \frac{1}{r^2 \sin \Lambda} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\Phi \sin \Lambda) \right] \\ 2 \omega_\Phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\Lambda) - \frac{\partial u_r}{\partial \Lambda} \right] \end{aligned} \right\} \dots \quad (117)$$

Die Spannungsgleichungen (107) lauten nunmehr

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2 \mu) r \sin \Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} - 2 \mu \left\{ \frac{\partial (\omega_\Phi \sin \Lambda)}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \omega_\Lambda}{\partial \Phi} \right\} + \rho F_r &= 0 \\ (\lambda + 2 \mu) \sin \Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} - 2 \mu \left\{ \frac{\partial \omega_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\Phi \sin \Lambda) \right\} + \rho F_\Lambda &= 0 \\ (\lambda + 2 \mu) \frac{1}{\sin \Lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} - 2 \mu \left\{ \frac{\partial (r \omega_\Lambda)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \Lambda} \right\} + \rho F_\Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß *nur radiale Massenkkräfte* R wirken. In diesem Falle wird $u_\Lambda = u_\Phi = 0$, die Verrückung U findet nur radial statt, $u_r = U$. Ferner ist

$$\begin{aligned} F_\Lambda = F_\Phi &= 0 & F_r &= R \\ \frac{\partial u_r}{\partial \Phi} &= 0 & \frac{\partial u_r}{\partial \Lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Nach (117) wird

$$\omega_r = 0 \qquad \omega_\Lambda = 0 \qquad \omega_\Phi = 0 \qquad \dots \quad (119)$$

Gleichung (116) für die Volumenänderung Θ geht über in

$$\Theta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r^2 U)}{\partial r} \right) = \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \quad \dots \quad (120)$$

Von dem System (118) bleibt nur eine Spannungsgleichung, und zwar die erste, übrig. Sie lautet jetzt unter Benutzung von (120)

$$(\lambda + 2 \mu) r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \right) + \rho R = 0 \quad \dots \quad (121)$$

Aus ihr folgt, falls K und $-a$ die Integrationskonstanten sind,

$$U = \frac{1}{r^2} \left\{ K + \int r^2 \left(\int - \frac{\rho R}{\lambda + 2 \mu} dr + a \right) dr \right\} \quad \dots \quad (122)$$

Wendet man diese Gleichung auf die Wirkung der Schwere auf die Spannungen im Erdinnern an — wir werden allerdings in § 155 sehen, daß dies

unzulässig ist —, so wird $R = g$. Nach (133) ist $\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{V^2}$, wo V die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Tiefe r ist, und wir erhalten

$$U = \frac{1}{r^2} \left\{ K - \int r^2 \left(\int \frac{g}{V^2} dr + a \right) dr \right\} \dots \dots \dots (123)$$

K und a sind aus den Grenzbedingungen zu ermitteln.

Die Normalspannung (Radialspannung) ergibt sich nach (92) zu

$$N = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda \frac{U}{r} \dots \dots \dots (124)$$

und die Transversalspannung nach Transformation von LAMÉ¹⁾ zu

$$T = \lambda \frac{\partial U}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r} \dots \dots \dots (125)$$

§ 149. Zusammenhang zwischen elastischen Konstanten und Wellengeschwindigkeit. Wir betrachten wieder ein Prisma und bezeichnen die Projektionen

	parallel der x -	y -	z -Achse
der Verrückungen eines Punktes mit	u	v	w
der Geschwindigkeit des Punktes mit	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial w}{\partial t}$
der Beschleunigung des Punktes mit	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

ferner die Seiten des Prismas (Fig. 152) mit dx, dy, dz , seine Dichte mit ϱ , sein Volumen mit $d\tau = dx dy dz$.

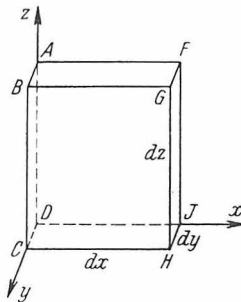


Fig. 152

Falls keine äußeren Kräfte wirken (Schwerkraft) und keine Energie durch Extinktion umgesetzt wird, ist die Kraft = Masse \times Beschleunigung. Betrachten wir die Kräfte, die $\parallel x$ wirken:

Auf $ABCD$ wirke die Normalspannung — N_1 pro Flächeneinheit, also auf die ganze Fläche — $N_1 dy dz$. Auf $EFGH$ wirkt entsprechend $(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx) dy dz$. In Richtung x bleibt demnach eine Resultante $\frac{\partial N_1}{\partial x} dx dy dz$.

¹⁾ Leçons sur la théorie . . . de l'élasticité. Paris, 1852.

Auf *ADIF* wirkt die Tangentialspannung $-T_3$ pro Flächeneinheit, also im ganzen $-T_3 dx dz$, auf *BCHG* analog $(T_3 + \frac{\partial T_3}{\partial y} dy) dx dz$. Als Resultante erhalten wir hier $\frac{\partial T_3}{\partial y} dx dy dz$, und analog für die beiden letzten Flächen $\frac{\partial T_2}{\partial x} dx dy dz$. Für die Gesamtkraft $\parallel x$ erhalten wir somit unter den oben angegebenen Voraussetzungen

$$\underbrace{\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) \partial \tau}_{\text{Kraft}} = \rho \partial \tau \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots \quad (126)$$

= Masse \times Beschleunigung

und zwei analoge Gleichungen für v und w . Setzen wir die Werte für N und T aus (92) bzw. (96) ein, so finden wir

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad \dots \quad (127)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad \dots \quad (128)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad \dots \quad (129)$$

wo wieder zur Abkürzung

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Wir differenzieren (127) nach x , (128) nach y , (129) nach z , addieren, und erhalten:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Theta \quad \dots \quad (130)$$

Diese Gleichung stellt die Volumänderung als Funktion des Ortes und der Zeit dar. Eine weitere Beziehung läßt sich aus dem Gleichungssystem (127) bis (129) ableiten: Differenzieren wir (129) nach y , (128) nach z und subtrahieren, so wird

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

Das Glied mit $(\lambda + \mu)$ fällt weg. Der Ausdruck $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ stellt nun nach (102) die Torsion ω_x eines Punktes um die x -Achse dar. Wir finden so

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega_x \\ \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega_y \\ \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega_z \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (131)$$

Das System (131), das ganz ähnlich aufgebaut ist wie (130), liefert also die Torsion um die drei Achsen als Funktion von Ort und Zeit.

Die Lösung von (130) lautet (Näheres in Band 4 des Handbuches)

$$\Theta = \frac{1}{r} F_1(r - Vt) \quad \dots \quad (132a)$$

wo

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad \dots \quad (133)$$

und ähnlich die Lösung von (131)

$$\omega = \frac{1}{r} F_2(r - \mathfrak{R}t) \quad \dots \quad (132b)$$

wo

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \dots \quad (134)$$

V und \mathfrak{R} sind nun aber nichts weiter als die Geschwindigkeiten, mit denen sich eine bestimmte Volumänderung Θ bzw. eine Scherung ω längs r fortpflanzen, denn gleiche Werte $r\Theta$ bzw. $r\omega$ treten auf, wenn

$$r_1 - Vt_1 = r_2 - Vt_2, \quad \text{also} \quad V = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1},$$

analog für \mathfrak{R} .

Wir finden also, daß sich im Falle einer Störung des Gleichgewichtes in einem Punkte unter den angegebenen Voraussetzungen eine Volumänderung Θ (Dilatation oder Kompression) allseitig mit der konstanten Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

und eine Scherung ebenso mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ fortpflanzt.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (97) bis (101) finden wir aus (134) und (135) folgende Beziehungen zwischen den Wellengeschwindigkeiten V der Longitudinalwellen (Kompressions-, Dilatationswellen) und \mathfrak{R} der Transversalwellen (Scherungswellen) sowie den elastischen Konstanten:

$$V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho} = \frac{E}{\rho} \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \dots \quad (135)$$

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1 + \sigma)} \quad \dots \quad (136)$$

$$\left(\frac{V}{\mathfrak{R}}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{k}{\mu} = 2 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 - \sigma}{2(1 - 2\sigma)} \quad \dots \quad (137)$$

$$\mu = \rho \mathfrak{R}^2 \quad \dots \quad (138)$$

$$k = \rho V^2 - \frac{4}{3}\mu = \rho \left(V^2 - \frac{4}{3}\mathfrak{R}^2\right) \quad \dots \quad (139)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left[\left(\frac{V}{\mathfrak{R}}\right)^2 - 1\right]} \quad \dots \quad (140)$$

$$\lambda = \rho V^2 - \frac{2}{3}\mu = \rho \left(V^2 - \frac{2}{3}\mathfrak{R}^2\right) \quad \dots \quad (141)$$

$$E = 2\rho \mathfrak{R}^2 (1 + \sigma) = 3\rho \frac{V^2 - 2\mathfrak{R}^2}{\left(\frac{V}{\mathfrak{R}}\right)^2 - 1} \quad \dots \quad (142)$$

Kapitel 14

Wellengeschwindigkeit, Dichte, Schwere und Druck
im Erdinnern

§ 150. Die Geschwindigkeiten elastischer Wellen im Erdinnern. Die Gleichungen (135) bis (142) zeigen, daß wir aus den Geschwindigkeiten elastischer Wellen im Erdinnern gewisse Schlüsse sowohl auf die Elastizitätskoeffizienten wie auf die Dichte ziehen können. Da die Theorie und die Beobachtungen über Erdbebenwellen eingehend in Band 4 des Handbuches dargestellt sind, können wir uns hier auf die Wiedergabe der wichtigsten Ergebnisse beschränken. Wir beobachten vor allem die Laufzeiten (Zeitdifferenz zwischen Auslösung und

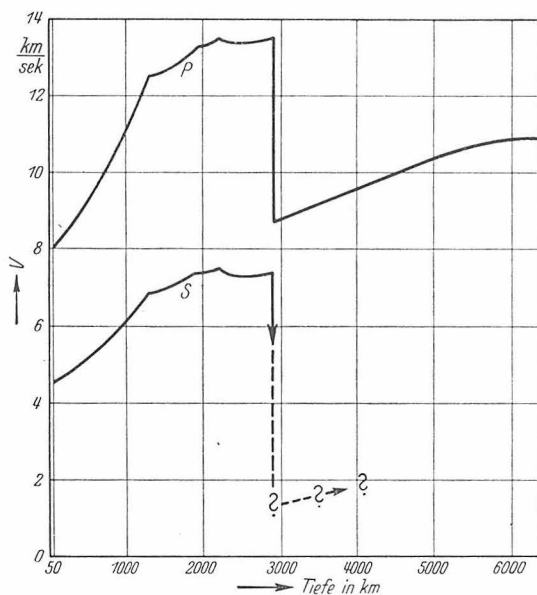


Fig. 153

Geschwindigkeit von Longitudinalwellen (P)
und Tranversalwellen (S) im Erdinnern
in verschiedenen Tiefen (über 50 km)

Eintreffen der Wellen), dann auch die Amplituden der Wellen. Aus ihnen erhalten wir mit verhältnismäßig großer Genauigkeit die Geschwindigkeit der Longitudinal- und Transversalwellen. Fig. 153 zeigt das Ergebnis für die Tiefen über 50 km.

Für die Erdkruste liegen leider bisher nur wenige genauere Werte vor. Sie zeigen zweifellos, daß dort erhebliche Unterschiede vorhanden sind. Auf Grund der bisherigen Untersuchungen können wir folgende zusammenfassende Angaben machen, wobei wir von den allerobersten Deckschichten (selten über 3 km dick) absehen wollen:

A. Kontinente. 1. *Mittel- und Norddeutschland.* In den bisher untersuchten Teilen befindet sich von etwa 1–3 km Tiefe ab eine Schicht, die bis etwa 10 km Tiefe reicht und in der $5,9 < V < 6,1$ km/sec (V = Longitudinalwellengeschwindigkeit). Darunter ist V = etwa $6\frac{3}{4}$ km/sec bis etwa 40–45 km Tiefe, wo V auf 8,0 km/sec springt.

2. *Süddeutschland*. Die bei der Explosion von Oppau erzeugten Longitudinalwellen pflanzten sich allseitig mit $V = 5,5$ bis $5,6$ km/sec Geschwindigkeit fort. — Die gleiche Geschwindigkeit ergibt sich für die Longitudinalwellen bei den beiden Süddeutschen Beben 1911 und 1913 für die obersten etwa 30 km. Es traten hierbei aber weitere Wellen auf, welche sich mit einer Geschwindigkeit von $6\frac{1}{4}$ km/sec in einer etwa zwischen 30 und 45 km Tiefe gelegenen Schicht fortpflanzten. Unterhalb 45 km Tiefe ist $7,8 < V < 8,1$ km/sec. Ferner wurden bei diesen Beben Oberflächenscherungswellen mit sehr kurzer Periode und einer Geschwindigkeit von etwa $\mathfrak{B} = 3\frac{1}{4}$ km/sec festgestellt. Bei der Explosion von Oppau liegen Anzeichen für (Transversal-?) Wellen mit einer Geschwindigkeit von $3,2$ km/sec vor.

Bei einem Rheinischen Beben am 23. 12. 28 ergab sich ebenfalls für die oberste Schicht $V = 5\frac{1}{2}$ km/sec, unterhalb 45 km $V = 8,0$ km/sec.

3. *Tauerngebiet bzw. Alpen*. Die Wellengeschwindigkeit ist in den Tauern in ∇ -förmigen Schichten fast die gleiche wie in Süddeutschland; die Beobachtungen

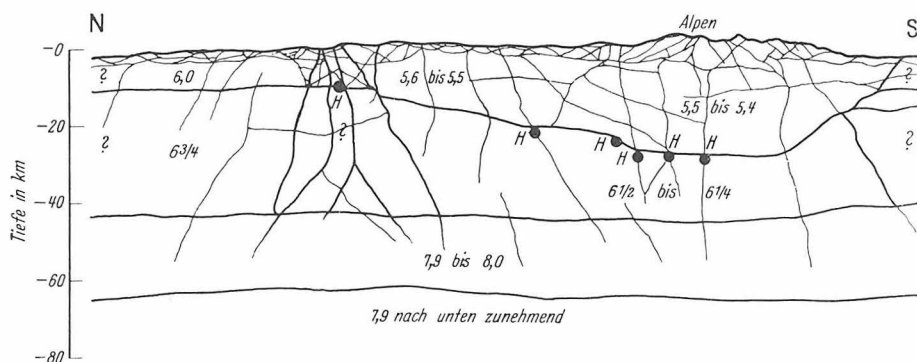


Fig. 154

Schematische Darstellung der Hauptschichtgrenzen in Europa auf Grund der Beobachtungen an Erdbebenwellen. Die eingeschriebenen Zahlen sind die mittleren Geschwindigkeiten von Longitudinalwellen in dem betr. Gebiet in km/sec. H = Erdbebenherde. Stark überhöht

sprechen vielleicht für einen um $0,1$ bis $0,2$ km/sec kleineren Wert in der obersten Schicht. In den mittleren Alpen und in Norditalien liegen die Verhältnisse, wie einzelne Diagramme zeigen, ähnlich. Eine spezielle Untersuchung fehlt noch. Die Alpen beeinflussen jedenfalls die Vorläufer nicht. Die Scherungs-Oberflächenwellen eines Tauernbebens hatten Geschwindigkeiten von $\mathfrak{B} = 3,0$ bis $3,1$ km/sec.

4. *Donauniederung bei Wien*. Bei dem „Schwadorfer Beben“ am 8. 10. 27 fand V. CONRAD folgende Werte, die den unter 2 und 3 angegebenen ähnlich sind: In der oberen Schicht (Dicke etwa 40 km) $V = 5,6$ km/sec, zwischen 40 und 50 km Tiefe $6,5$ km/sec, darunter $8,1$ km/sec. Die entsprechenden Transversalwellengeschwindigkeiten scheinen $3,3$, $3,6$ und $4,3$ km/sec zu sein.

5. *Jugoslawien*. Bei einem Kulpatalbeben ergaben sich etwa die gleichen Werte wie in Süddeutschland.

Fig. 154 zeigt, wie wir uns nach den vorstehenden Ergebnissen etwa den Aufbau von Europa (Schnitt von Norden nach Süden) vorstellen müssen.

6. *England*. H. JEFFREYS fand die gleichen Wellengeschwindigkeiten wie in Süddeutschland, jedoch 10 – 20 km geringere Tiefe der Schichtgrenzen. In diesem Zusammenhange ist die Tatsache von Interesse, daß auch bei dem Rhei-

nischen Beben vom 23. 12. 28 die Wellen durch die unterste Schicht etwa 1 Sekunde früher kamen als bei den mitteleuropäischen Beben, was als Folge einer einige Kilometer höheren Lage der untersten Schichtgrenze gedeutet werden kann. Diese würde also im westlichen Europa gegen den Atlantischen Ozean hin ansteigen.

7. *Japan*. Bei dem katastrophalen Beben 1923 ergaben sich ähnliche Werte wie in Süddeutschland. Bei weiteren Untersuchungen an anderen Beben kam K. SUDA zu dem Ergebnis, daß die Grenze zwischen dem Gebiet mit kleinerer und größerer Wellengeschwindigkeit im Osten Japans höher liegt als im Westen, und MATUZAWA fand innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit die gleichen Schichtdicken, wie sie sich für Europa ergeben hatten. Auch in Zi-ka-wei (bei Shang-hai) zeigen die Aufzeichnungen von Japanbeben die gleichen Wellen wie die Nahbebenaufzeichnungen von europäischen Beben. Es ist somit unter dem Gebiet zwischen Japan und China ebenfalls die Zweiteilung der obersten Schicht vorhanden.

8. *Kalifornien*. Die Aufzeichnungen von Nahbeben sehen ähnlich aus wie in Europa, in der obersten Schicht sind die Wellengeschwindigkeiten $5\frac{1}{2}$ bzw. $3\frac{1}{4}$ km/sec, die beiden anderen Schichten sind noch nicht genau genug untersucht.

Aus anderen kontinentalen Gegenden liegen keine Beobachtungen vor, welche ähnliche Schlüsse gestatten.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so sehen wir, daß mindestens in Europa, wahrscheinlich aber in allen Kontinenten folgender Aufbau vorhanden ist:

a) Eine Deckschicht von variabler Dicke, die mehr oder minder durch geologische Untersuchungen erforscht ist.

b) Eine Schicht, in welcher Geschwindigkeiten der Longitudinalwellen zwischen 5,4 km/sec (Tauern) und 6,1 km/sec (Mitteldeutschland) festgestellt wurden. Die Dickenberechnungen ergeben Werte von etwa 10 bis 30 km. Das Maximum der Dicke scheint in Europa etwa unter den Alpen zu liegen, was auch aus Gründen der Isostasie zu erwarten ist. Die Geschwindigkeit der Transversalwellen beträgt in dieser Schicht etwa $3,2 \pm 0,2$ km/sec. Ihre direkte Bestimmung wird durch das Auftreten der Oberflächenscherungswellen sehr erschwert.

c) Eine Schicht, die in Europa bis etwa 40—45 km Tiefe reicht. Die Longitudinalwellen pflanzen sich in ihr mit einer Geschwindigkeit von etwa $6\frac{1}{2}$ km/sec fort, Beobachtungen über Transversalwellen fehlen und sind auch infolge der relativ starken Bewegungen, die an und für sich zu dem betreffenden Zeitpunkt vorhanden sind, kaum zu erwarten. Auch in Japan und in Kalifornien ist diese Schichtgrenze vorhanden. In Ostjapan, vielleicht auch in England, liegt die Schichtgrenze höher. In den Alpen ist offenbar diese Schicht nicht wesentlich gestört.

d) Unterhalb der Grenze in etwa 45 km Tiefe beträgt die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen überall, wo sie festgestellt wurde, fast 8,0 km/sec, die der Transversalwellen 4,4 bis 4,5 km/sec.

B. *Ozeane*. Leider liegen auch hier nur einige wenige Beobachtungen von Nahbeben vor, welche im Boden des Pazifischen Ozeans stattfanden und auf Inseln aufgezeichnet wurden; streng genommen sind solche Aufzeichnungen für uns nur brauchbar, wenn das Instrument auf dem Meeresboden aufsitzt, da die Inseln im allgemeinen nicht als ungestörter Meeresboden angesehen werden dürfen. Es ergibt sich, daß sowohl die *P*- wie die *S*-Wellen bei kleinen Distanzen merklich früher kommen als unter gleichen Umständen in Europa, und daß in größeren Distanzen die Unterschiede abnehmen, d. h. daß die Wellen in den obersten Schichten schneller laufen als in den Kontinenten, daß jedoch die Unterschiede in größerer Tiefe verschwinden.

§ 151. Ergebnisse über den Aufbau der Erdkruste aus Beobachtungen von Oberflächenwellen. (Näheres in Band 4.) Bei Oberflächenwellen, von denen mehrere Arten existieren, pflanzt sich die ganze Energie in einer oberflächennahen Schicht fort, die um so dünner ist, je kleiner die Wellenlänge, also die Periode der Wellen ist. Die Geschwindigkeit der Wellen hängt von der Geschwindigkeit ϑ der Transversalwellen ab. Linear polarisierte Scherungsoberflächenwellen besitzen die gleiche Geschwindigkeit wie die Transversalwellen, die übrigen beobachtbaren Oberflächenwellen laufen langsamer. Je größer die Wellenlänge ist, in desto dickeren Schichten läuft die Energie, desto größer muß also auch die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen sein, da ja die Transversalwellengeschwindigkeit mit der Tiefe wächst. In Band 4 des Handbuches sind diese Probleme quantitativ behandelt. Hier wollen wir uns auf eine rohe qualitative Darstellung beschränken.

Die Wellenlänge der Scherungsoberflächenwellen beträgt im Falle der Strichpolarisation bei

Perioden von	1	10	20	30	60	120 Sekunden
etwa	3	30	70	100	240	530 km

Während also bei kleinen Perioden die Wellenlänge und damit auch die Dicke der durch die Wellen affizierten Schicht klein ist gegenüber den oberflächennahen Schichten, sind für mittlere Perioden beide von der gleichen Größenordnung, und bei Wellen mit großen Perioden fließt der größte Teil der Energie unterhalb der Schichtgrenze in 45 km Tiefe. Dementsprechend müssen wir erwarten, und die Rechnungen bestätigen dies, daß die kurzen Wellen sich mit der Geschwindigkeit der Transversalwellen in der obersten Schicht ausbreiten, sehr lange oberflächenscherungswellen mit einer Geschwindigkeit, die etwas über der Geschwindigkeit der Scherungswellen in 50 km Tiefe liegt (infolge des Anwachsens der Geschwindigkeit mit der Tiefe), Oberflächenwellen mit mittleren Perioden mit einer Geschwindigkeit, die zwischen diesen Werten liegt. Je dünner die Schichten sind, bei desto kleineren Perioden muß der Anstieg der Geschwindigkeit erfolgen. Man erhält so aus der Geschwindigkeit kurzer linear polarisierter Scherungsoberflächenwellen die Geschwindigkeit von Transversalwellen in der obersten Schicht, aus der Geschwindigkeit von gleichartigen Oberflächenwellen mit sehr langen Perioden etwa die Wellengeschwindigkeit in 100 km Tiefe, und aus der Periode bzw. Wellenlänge, bei der der stärkste Anstieg der Geschwindigkeit erfolgt, die Dicke der obersten Schicht.

Die Untersuchungen von Oberflächenwellen von Erdbeben haben vor allem zweifelsfrei ergeben, daß die ganz langen Scherungsoberflächenwellen mit Perioden von 1 Minute und mehr überall eine Geschwindigkeit von 4,4 bis 4,5 km/sec haben. Daraus folgt, daß in allen Gebieten der Erde die Scherungswellen diese Geschwindigkeit in Tiefen von rund 50 km und mehr besitzen. Ganz kurze linear polarisierte Scherungswellen laufen in den Kontinenten mit etwa $3\frac{1}{3}$ km/sec. Im Boden des Pazifischen Ozeans fehlt Beobachtungsmaterial, doch laufen dort schon die kürzesten Wellen erheblich schneller als unter den Kontinenten. Die Stelle stärksten Anstieges der Geschwindigkeit liegt bei Wellen, die im Boden des Atlantischen Ozeans gelaufen sind, bei viel kleineren Perioden als bei Wellen, die Kontinente passiert haben. Die genauere Rechnung ergibt, daß die Krustendicke unter dem Atlantischen Ozean rund halb so groß ist als unter Europa, daß also im ersten Falle die Grenze mit höherer Wellengeschwindigkeit in 20–25 km Tiefe liegt, und daß im Boden des Pazifischen Ozeans eine solche Schicht fehlt oder sehr dünn ist¹⁾.

¹⁾ Vgl. hierzu B. GUTENBERG, Gerlands Beitr. z. Geophysik, 26, 156, 1930.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis haben die Untersuchungen über die Extinktion (Schwächung) der Oberflächenwellen geliefert. Es ergab sich, daß die ganz langen Wellen unter allen Gebieten der Erde innerhalb der Beobachtungsfehler die gleiche Schwächung erfahren, daß aber kurze Wellen erheblich stärker als in allen anderen Gebieten geschwächt werden, wenn sie die physikalischen Grenzen des Pazifischen Ozeans überschritten haben. Die einfachste Deutung hierfür liefert die schon oben gefundene Tatsache, daß die oberste Decke des Pazifikuntergrundes aus wesentlich anderem Material gebildet wird als in allen anderen Teilen der Erde, und daß an den vertikalen Grenzen dieses Gebietes gegen die anders gebauten Nachbarblöcke Reflexionen und Brechungen der Oberflächenwellen stattfinden. Bei Wellen, die die Grenzen des Atlantischen Ozeans passiert haben, wurde eine derartige Erscheinung nicht festgestellt, hier geht also der Untergrund anscheinend stetig vom Meeresboden zum Kontinentalboden über.

§ 152. Die Dichte im Erdinnern. Eine eingehende Darstellung der Theorien über die Dichte der Erde befindet sich in Band I des Handbuches. Wir können uns daher hier auf eine kurze Darstellung der Ergebnisse beschränken.

Tabelle 45
Oberflächendichte einzelner Gebiete der Erde
nach H. S. WASHINGTON

Gebiet	Höhe über NN m	δ_a	δ_w	δ_s
Nordamerika	700	2,78	2,73	—
Grönland	980	2,78	2,73	—
Colorado	2134	2,76	2,71	—
Südamerika	580	2,78	2,73	—
Anden	1820	2,75	2,70	2,60
Großbritannien	100	2,83	2,76	2,83
Deutschland	300	2,81	2,74	2,79
Schweiz und Tirol . . .	1550	2,78	2,70	2,77
Amerika	650	2,78	2,73	—
Afrika	650	2,78	2,72	—
Asien	950	2,77	2,71	—
Europa	300	2,79	2,73	—
Australien	350	2,81	2,75	2,77
Atlantik	— 4116	2,89	2,81	(2,86)
Pazifik	— 4520	3,09	3,01	—
Antarktis	?	2,81	2,82	—
Erde	—	2,79	2,74	2,76

a) Die Dichte an der Erdoberfläche. Für die Dichte der Gesteine, welche am Aufbau der Erde beteiligt sind, ergeben sich sehr verschiedene Werte (vgl. betr. Abschnitt). Im allgemeinen wird angenommen, daß die mittlere Dichte der obersten Teile der Erdkruste 2,7 bis 2,8 beträgt. Die Werte sind jedoch auch in größeren Gebieten recht verschieden. Als die eingehendsten Untersuchungen können wohl die von H. S. WASHINGTON¹⁾ gelten. Dieser berechnete für verschiedene Ge-

¹⁾ Isostasy and rock density. Bull. geol. soc. of America, 33, 375, 1922.

bierte der Erde die Oberflächendichte, indem er einmal die vorherrschenden Gesteine der betreffenden Gegend bestimmte und dann unter Benutzung der bekannten Dichte dieser Gesteine auf die Dichte der Gegend und dann größerer Gebiete schloß; dann bestimmte er aber auch die Dichte, indem er Dichtebeobachtungen aus den einzelnen Gebieten benutzte. Die letztere Methode ist einfacher, gab aber weniger sichere Ergebnisse; bei der ersten Methode sah sich WASHINGTON genötigt, Zahlenwerte mit und ohne Berücksichtigung des Wassergehaltes anzugeben. Tabelle 45 ist ein Auszug aus seinen Ergebnissen; die Spalten δ_u und δ_w beziehen sich auf die erste Methode (δ_u ohne, δ_w mit Berücksichtigung des Wassergehaltes), δ_s auf die zweite Methode. Als wahrscheinlichsten Wert für die Oberflächendichte δ_0 der Erde im Mittel finden wir hiernach: $\delta_0 = 2,7$ bis $2,8$.

b) *Die mittlere Dichte der Erde.* Zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erde benutzt man die Anziehungskraft der Erde. Es wurde hierzu eine ganze Reihe von Methoden erdacht, die in Band 1 des Handbuches ausführlicher behandelt sind. Als bester Wert für die mittlere Dichte der Erde gilt heute 5,527.

c) *Die Dichte im Erdinnern.* Wie in Band 1 eingehend ausgeführt wird, muß das Gesetz für die Dichte im Erdinnern eine Reihe von Bedingungen erfüllen:

Es muß die richtige mittlere Dichte der Erde liefern,
 die richtige Dichte für die Oberfläche,
 die richtige Gestalt der Erde,
 insbesondere die Abplattung an der Erdoberfläche,
 die Schwereverteilung an der Erdoberfläche als Funktion der geographischen Breite,
 die beobachtete Bewegung des Mondes,
 die Nutation.

Unter Umständen liefern einige dieser Bedingungen die gleichen mathematischen Beziehungen.

Einen weiteren Anhaltspunkt für das Dichtegesetz liefern die Ergebnisse über die Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinnern. Sie zeigen, daß von etwa 70 km Tiefe an die Wellengeschwindigkeit stetig bis in 1200—1300 km Tiefe anwächst (vgl. Fig. 153), daß von dort an die Zunahme ungleichmäßiger und schwächer wird, und daß in 2900 km Tiefe eine sprunghafte Abnahme der Wellengeschwindigkeit erfolgt. Im Kern steigt die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen wieder langsam an, während Transversalwellen bisher dort nicht festgestellt wurden; ihre Geschwindigkeit ist also im Kern vermutlich sehr klein. Da nach (133) bzw. (134) die Geschwindigkeit V der Longitudinalwellen und die Geschwindigkeit \mathfrak{B} der Transversalwellen proportional den Quadratwurzeln aus Summen der Elastizitätsmoduln, indirekt proportional der Wurzel aus der Dichte ist, folgt, daß auch die Dichte im Erdinnern von 70 bis 1200 km Tiefe stetig verläuft, daß die Dichtekurve dort möglicherweise einen Knick hat und dann mit einigen Unregelmäßigkeiten, in der Hauptsache gleichmäßig bis in 2900 km Tiefe verläuft. Dort kann sie einen Sprung aufweisen; ein solcher würde nicht vorhanden sein, wenn die sprunghafte Abnahme der Wellengeschwindigkeit nur durch die elastischen Konstanten bedingt ist. Im Erdkern ändert sich die Dichte dann wieder stetig.

Als weitere Forderung für das Dichtegesetz können wir aufstellen, daß die Dichte im Erdinnern nirgends abnimmt. Man kann sogar noch etwas weiter gehen und fordern, daß sie mindestens so stark zunimmt, wie dies der Fall wäre, wenn die Erde homogen wäre und nur durch den Druck das Material in wachsen-

dem Maße komprimiert würde. Eine erste Rechnung wurde von K. FEURSTEIN¹⁾ durchgeführt. Er ging davon aus, daß die Schwere im Mantel angenähert konstant ist (vgl. § 153) und nahm auch für den Kern eine konstante mittlere Schwere an. Er fand dann für den Mantel

$$\rho = \rho_0 \lg \left[c (\alpha r + \beta)^{-\frac{g}{\alpha}} \right] \dots \dots \dots (143)$$

und für den Kern angenähert

$$\rho = \rho_c c_1 \frac{\sin(r \sqrt{m})}{r} \dots \dots \dots (144)$$

wobei

$$m = \frac{4\pi \rho_0 \kappa}{a} \dots \dots \dots (145)$$

c_1 und c = Integrationskonstanten, κ = Gravitationskonstante = $6,658 \cdot 10^{-8}$ sind, ferner für die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen im Mantel $V^2 = \alpha r + \beta$ gilt, im Kern $V = a$ konstant. Aus (143) folgt für den Mantel

$$\rho_1 - \rho_0 = -\rho_0 \frac{g}{\alpha} \lg \frac{\alpha r_1 + \beta}{\alpha r_0 + \beta} \dots \dots \dots (146)$$

wo ρ_0 = Oberflächendichte, ρ_1 = Dichte an der Kerngrenze. Nach den Ergebnissen über die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen im Mantel wird

α = etwa $-7,4 \cdot 10^3$; $\alpha r_0 + \beta = 5,1 \cdot 10^{11}$; $\alpha r_1 + \beta = 16 \cdot 10^{11}$ (für $r_1 = 1500$ km).

Ferner ist g = etwa 1000 für den Mantel. Damit ergibt sich nach (146)

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_0 &= 0,16 \rho_0 & \rho_1 &= 1,16 \rho_0, \text{ also} \\ \rho_1 &= 3,5 \text{ für } \rho_0 = 3,0 & \text{und} & \rho_1 = 4,0 \text{ für } \rho_0 = 3,4. \end{aligned}$$

Im Kern wird, falls ρ_c = Dichte im Erdmittelpunkt, nach (144) angenähert

$$\frac{\rho_c}{\rho_1} = \frac{r_1 \sqrt{m}}{\sin(r_1 \sqrt{m})} \dots \dots \dots (147)$$

Auch $\rho_c : \rho_1$ ist nur von der Größenordnung 1,1, für $\rho_0 = 3,4$ ergibt sich also $\rho_1 = 4$ und $\rho_c = 4\frac{1}{2}$. FEURSTEIN schloß:

Die hohe mittlere Dichte der Erde ist nur dadurch zu erklären, daß man im Erdinnern Schichten annimmt, die auch im unkomprimierten Zustand aus erheblich schwererem Material bestehen als die an der Oberfläche liegenden Gesteine.

Zu ähnlichen Ergebnissen kamen 1923 dann auch WILLIAMSON und ADAMS²⁾. Ist die Dichtezunahme im Erdinnern nur durch den Druck bedingt, so ist

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = - \int_{r_0}^r \frac{\kappa m \rho}{r^2 k} \partial r, \dots \dots \dots (148)$$

wobei m die Masse der Erde, k der „Inkompressibilitätsfaktor“ (vgl. S. 445), κ die Gravitationskonstante ist.

$$m = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \partial r \dots \dots \dots (149)$$

$$k = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad p = \text{Druck.}$$

¹⁾ Elastischer Zustand und Spannungsverteilung im Erdinnern. Dissertation, Freiburg i. B., 1912.

²⁾ Journ. of the Washington Acad. Bd. 13, S. 413, 1923; Smithsonian report for 1923, S. 241, Washington 1925.

WILLIAMSON und ADAMS entnahmen $k:\rho$ den Beobachtungen über Erdbebenwellen. Falls V und \mathfrak{Q} die Geschwindigkeiten longitudinaler bzw. transversaler Erdbebenwellen sind, so ist nach (139)

$$\frac{k}{\rho} = V^2 - \frac{4}{3} \mathfrak{Q}^2.$$

Das Dichtegesetz wird zunächst angenommen und dann durch graphisches Integrieren der Gleichung für $\ln(\rho:\rho_0)$ approximiert.

Die Kurve 6 in Fig. 155 zeigt das Ergebnis, das im Prinzip mit dem von FEURSTEIN übereinstimmt. Andererseits können wir nunmehr voraussetzen, daß

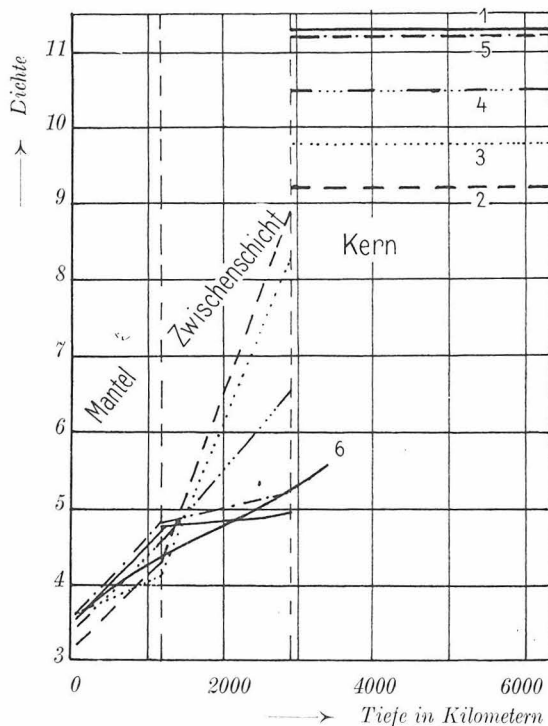


Fig. 155
Dichte im Erdinnern. 1—5 unter verschiedenen Annahmen unter der Voraussetzung, daß die unter c) S. 460 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, 6 nach WILLIAMSON und ADAMS unter der Voraussetzung, daß die Dichteänderung nur durch den Druck bedingt ist

die wirkliche Kurve für die Dichte im Erdinnern nirgends unterhalb der Kurve 6 verläuft.

Die S. 460 angeführten Bedingungen liefern im allgemeinen (vgl. Band 1 des Handbuches) nur drei Gleichungen. Man setzte deswegen in der Praxis voraus, daß die Dichte von der Erdoberfläche bzw. 70 km Tiefe von einem Werte ρ_0 linear bis 1200 km Tiefe zunimmt, von da ab ohne Sprung aber nach einem anderen Gesetz linear bis zum Kern in 2900 km Tiefe, sich dort sprunghaft ändert und dann bis zum Erdmittelpunkt konstant bleibt. In Wirklichkeit wird allerdings besonders in den äußeren Kernschichten eine weitere Zunahme stattfinden. Da wir vier Unbekannte haben, bleibt eine Variable. HAALCK¹⁾ benutzte die Abplattung des Kernes als solche. Er setzte $\rho_m = 5,53$, $\rho_0 = 2,7$, in 60 km Tiefe nahm er einen Dichtesprung von 3,1 auf ρ_4 an und bezeichnete die Dichte in einer Tiefe von:

¹⁾ Zeitschrift für angewandte Geophysik, 1, 257, 1924.

1200 km 2900 km oben 2900 km unten bis zum Erdmittelpunkt

mit ϱ_3 ϱ_2 ϱ_1

Weiter setzte er: $a_0 = \frac{1}{297} = 0,003367$, $\frac{\omega^2 r_0}{g_0} = \frac{3,391}{978,030} = 0,003467$

$q = \frac{C-A}{C} = \frac{1}{306} = 0,003268$ (vgl. Band 1); a_0 = Abplattung an der Erdoberfläche, ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde, C und A = Hauptträgheitsmomente der Erde.

Variabel bleibt zunächst die Abplattung des Kernes (a_1), für die HAALCK die Werte A : 0,0029, B : 0,0028, C : 0,0027 und (nach brieflicher Mitteilung) D : 0,0026 wählte, sowie die Dichte unterhalb 60 km, für die er $\varrho_1 = 3,2; 3,4; 3,6$ setzte. Es ergaben sich die in Tabelle 46 zusammengestellten Wertsysteme, von denen einige in Abb. 155 eingetragen sind. a_2 und a_3 sind die Abplattung in 120 bzw. 60 km Tiefe. Die Annahmen A und D stellen nach dem oben Gesagten etwa die äußersten Grenzen für die Dichte im Erdinnern dar.

Tabelle 46
Mögliche Dichteverteilung im Erdinnern nach W. HAALCK

Fall	A		B			C			D		
	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
a_1	0,0029		0,0028			0,0027			0,0026		
δ_4	3,2	3,4	3,2	3,4	3,6	3,2	3,4	3,6	3,2	3,4	3,6
δ_3	4,26	4,04	4,53	4,30	4,08	4,79	4,57	4,35	5,0	4,8	4,6
δ_2	8,92	9,20	7,63	7,92	8,19	6,30	6,58	6,86	4,9	5,2	5,5
δ_1	9,18	9,17	9,80	9,80	9,80	10,46	10,46	10,46	11,2	11,2	11,2
a_2	0,002919		0,002882			0,002845			0,00281		
a_3	0,003325		0,003325			0,003325			0,00333		

Aus der Tabelle ergeben sich folgende Grenzwerte für die Dichte:

in 1200 km Tiefe: 4,0 bis 5,0
in 2900 „ „ (oben): 4,9 „ 9,2
im Kern: 9 „ 11¹/₂

Nimmt man an, daß die Rigkeit im Erdkern sehr klein ist, was nach S. 509 sehr wahrscheinlich ist, und daß sich die Kompressibilität am Erdkern nicht wesentlich ändert, so ergibt sich, daß die Dichte dort auf etwa das 1,4fache springt, daß also dann etwa die Spalte C der Tabelle 46 zutreffen würde. (Vgl. auch Fig. 168 S. 522.)

Die Kurven (Fig. 155) stimmen bis 1200 km gut mit Kurve 6 überein, so daß im Mantel die Dichteänderung etwa der durch den Druck bewirkten Zunahme entspricht. Darüber hinaus liegt die Möglichkeit vor (Kurven ähnlich 1 und 5), daß die *Dichteänderung bis zum Kern vorwiegend durch die Druckänderung bedingt ist*, und erst am Kern eine Substanzänderung eintritt. Wie die Temperaturzunahme und die möglichen Änderungen des Aggregatzustandes wirken, läßt sich nicht ohne weiteres sagen¹⁾.

Aus den Betrachtungen können wir aber noch mehr folgern: Ganz analog wie infolge des steigenden Druckes die Dichte der Mantelsubstanz bis zum Kern

¹⁾ Vgl. z. B. A. BLESS, Phys. Review (2), **35**, 1436, 1930.

recht beträchtlich ansteigen dürfte, ist auch bei den Metallen, die man im Kern voraussetzt, eine wesentlich höhere Dichte als an der Erdoberfläche zu erwarten, die sich genauer berechnen ließe, wenn die Änderung der Kompressibilität mit dem Druck und der Temperatur genauer bekannt wäre. Es ist infolgedessen durchaus denkbar, daß Eisen im Erdkern eine Dichte von etwa 11 besitzt, so daß die Größe der für den Erdkern gefundenen Werte durchaus unbedenklich erscheint.

Als Gesamtergebnis können wir auf Fig. 155 verweisen, die uns besser als jede Beschreibung einen Überblick über die Dichte und die Dichteänderungen gibt, mit denen wir in den einzelnen Tiefen rechnen können.

d) *Die Dichte in den obersten Erdschichten.* Es muß nun der Versuch gemacht werden, eine Dichteverteilung in den obersten Erdschichten zu finden, die gleichzeitig den Erdbebenbeobachtungen (§ 150) und den Beobachtungen über die Oberflächendichte (Tabelle 45) genügt und dabei die Bedingung der Isostasie erfüllt. Wir sahen S. 456ff., daß die Unterschiede im Aufbau der Erdkruste in den verschiedenen Gebieten bis etwa 45 km Tiefe hinabreichen. Wir setzen daher in erster Annäherung voraus, daß die über der Niveaufläche in 45 km Tiefe liegenden Massen überall gleich sind; die in Tabelle 47 angegebenen Werte entsprechen etwa dieser Bedingung unter Berücksichtigung der Oberflächendichten (Tabelle 45) und der Schichtdicken, die sich aus Erdbebenbeobachtungen (S. 455ff.) ergaben. Dazu ist noch zu bemerken, daß in 60–70 km Tiefe möglicherweise die Grenze der kristallinen Erdkruste liegt (vgl. S. 33ff.), und daß dort die Dichte etwas abnimmt.

Tabelle 47
Wahrscheinliche Dichte
der oberen Schichten der Erdkruste

Tiefe in km	Eurasien, Amerika	Atlantik	Pazifik
0	2,75	2,85	3,05
10	2,8	2,9	3,1
20	2,8	2,9	3,1
30	2,9	3,1	3,1
40	2,9	3,1	3,1
50	2,9	3,2	3,2
60	3,2	3,2	3,2
100	3,2	3,2	3,2

§ 153. *Die Schwere im Erdinnern.* Zur Berechnung des Druckes p im Erdinnern geht man am besten von der Schwere g aus. Ist dp die Druckänderung längs des Radiumelementes dr und ρ die Dichte, so findet man die Druckänderung dp als das Gewicht einer Säule mit der Höhe dr :

$$dp = -\rho g dr \quad \dots \dots \dots (150)$$

Die Schwere findet man als die Anziehung einer Kugel mit dem Radius r ; die äußeren Schichten üben keinen Einfluß aus. Es ist hiernach (vgl. Band 1):

$$g = \frac{\gamma}{r^2} \cdot m = \frac{4\pi\gamma}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr \quad \dots \dots \dots (151)$$

wo γ die Gravitationskonstante ist und m die Masse der Kugel mit dem Radius r . Bei der Berechnung der Schwere an der Erdoberfläche ist für m die Erdmasse

einzusetzen, und wir erhalten, falls φ_m die mittlere Dichte der Erde ist, und r_0 der Erdradius

$$g_0 = \frac{4}{3} \pi \varphi_m r_0 \dots \dots \dots (152)$$

Berechnen wir hieraus z und setzen es in (151) ein, so findet man für die Schwere g in der Kugelfläche mit dem Radius r unter Vernachlässigung der Abweichung der Erde von der Kugelform

$$g = \frac{3 g_0}{\varphi_m r_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r \varphi r^2 dr \dots \dots \dots (153)$$

Da die Dichte im Erdinnern nicht durch eine einfache Funktion von r darstellbar ist, bleibt zur Berechnung von g nichts anderes übrig, als graphische Integration

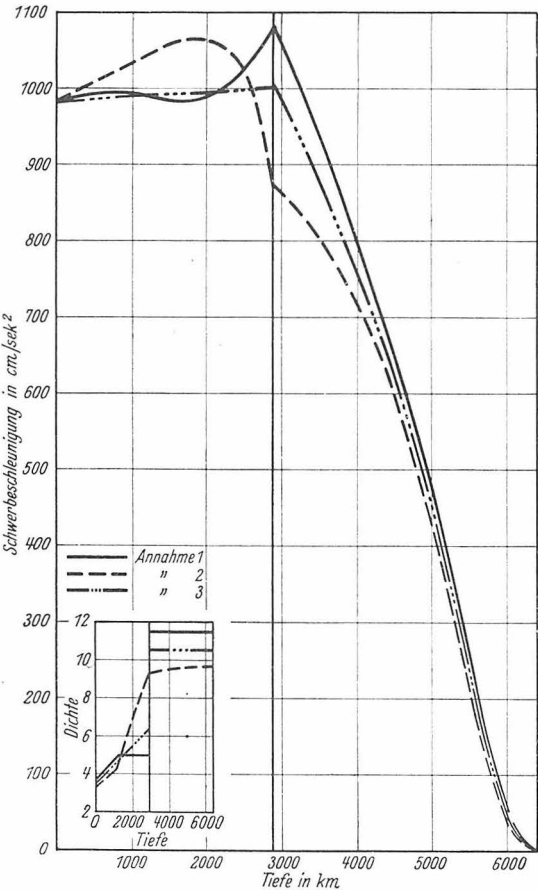


Fig. 156
Schwere im Erd-
innern unter Vor-
aussetzung der in
der Nebenfigur
angegebenen
Werte für die
Dichte im Erd-
innern

vorzunehmen. Fig. 156 zeigt das Ergebnis unter verschiedenen Annahmen über die Dichte entsprechend der Fig. 155.

Aus Gleichung (153) läßt sich eine Reihe von Schlüssen ziehen. Nimmt man zunächst an, daß die Dichte im Erdinnern konstant sei, so ergibt sich, daß dann die Schwere von g_0 an der Erdoberfläche linear mit r auf Null im Erdmittelpunkt abnimmt. Man sieht aber auch anderseits leicht ein, daß man die Schwere bis zur Tiefe mit dem Radius r auch dann berechnen kann, wenn man g_0 an der Erdoberfläche und die Dichte zwischen dieser und der Tiefe mit dem Radius r kennt. Es ist nämlich

$$g = \frac{3 g_0}{\varrho_m r_0} \cdot \frac{1}{r^2} \left[\int_0^{r_0} \varrho r^2 dr + \int_{r_0}^r \varrho r^2 dr \right]$$

$$g = \frac{r_0^2}{r^2} g_0 + \frac{3 g_0}{\varrho_m r_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r \varrho r^2 dr = g_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \frac{c}{r^2} \int_{r_0}^r \varrho r^2 dr \right] \quad (154)$$

wo

$$c = \frac{3}{\varrho_m r_0} \quad (155)$$

eine Konstante der Erde ist.

Wir können nun mit hinreichender Annäherung voraussetzen, daß die Erdkruste außen überall aus dünnen Schichten besteht, in denen die Dichte nahezu konstant ist, und auf die nach innen dann der eigentliche Mantel folgt, in dem bis etwa 1300 km Tiefe die Dichte in erster Annäherung linear wächst (vgl. S. 460). Wir können die Dichteverteilung für alle Gebiete genügend genau erhalten, wenn wir voraussetzen

außen eine Schicht mit der Dicke d_1 und der konstanten Dichte ϱ_1
 darunter eine Schicht mit der Dicke d_2 und der konstanten Dichte ϱ_2
 darunter Zunahme der Dichte von ϱ_3 auf $\varrho_3 + Q (r_2 - r)$, wo $r_2 = r_0 - (d_1 + d_2)$.

Gleichung (153) lautet dann für den so zusammengesetzten Mantel der Erde

$$g = g_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \frac{c \varrho_1}{r^2} \int_{r_0}^{r_0 - d_1} r^2 dr + \frac{c \varrho_2}{r^2} \int_{r_0 - d_1}^{r_0 - (d_1 + d_2)} r^2 dr + \frac{c}{r^2} \int_{r_0 - (d_1 + d_2)}^r [\varrho_3 + Q (r_2 - r)] r^2 dr \right] \quad (156)$$

Setzt man noch $d_1 + d_2 = D$, so ist

$$g = g_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \frac{c \varrho_1}{3 r^2} \left\{ (r_0 - d_1)^3 - r_0^3 \right\} + \frac{c \varrho_2}{3 r^2} \left\{ (r_0 - D)^3 - (r_0 - d_1)^3 \right\} \right. \\ \left. + \frac{c \varrho_3}{3 r^2} \left\{ r^3 - (r_0 - D)^3 \right\} + \frac{c Q r_2}{3 r^2} (r^3 - r_2^3) - \frac{c Q}{4 r^2} (r^4 - r_2^4) \right]$$

Setzt man für c den Wert aus (155) ein, ferner $r = r_0 - h$, so ergibt sich für die Schwere in der Tiefe h

$$g = g_0 \left[\frac{1}{1 - 2 \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_m} \frac{3 \frac{d_1}{r_0} - 3 \left(\frac{d_1}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{d_1}{r_0} \right)^3}{1 - 2 \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\varrho_2}{\varrho_m} \frac{3 \frac{D}{r_0} - 3 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{D}{r_0} \right)^3 - 3 \frac{d_1}{r_0} + 3 \left(\frac{d_1}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{d_1}{r_0} \right)^2}{1 - 2 \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\varrho_3}{\varrho_m} \frac{3 \frac{h}{r_0} - 3 \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{h}{r_0} \right)^3 - 3 \frac{D}{r_0} + 3 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{D}{r_0} \right)^3}{1 - 2 \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{3 Q}{\varrho_m r_0 r^2} \left(\frac{r_2^3}{3} - \frac{r^4}{4} - \frac{r_2^4}{12} \right) \right] \quad (157)$$

Beschränkt man sich auf Tiefen von wenigen hundert Kilometern, so kann man die höheren Potenzen von $h:r_0$ gegenüber $h:r_0$ vernachlässigen. Andererseits sind d_1 , d_2 und D in der Praxis höchstens 50 km, so daß auch hier die höheren Potenzen von $d:r_0$ gegenüber den niederen ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden können. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Erdkruste in genügender Annäherung (für $h = 300$ km ist die Vernachlässigung etwa 3 %, für $h = 600$ km etwa 10 % der Korrektion)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} r^2 \left(\frac{r_2^3}{3} - \frac{r^4}{4} - \frac{r_2^4}{12} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{r_0}{r^2} (h - D)^2 + \dots = -\frac{1}{2} \frac{(h - D)^2}{r_0 - 2h} + \dots \\ g &= g_0 \left[1 + 2 \frac{h}{r_0} - 3 \frac{\rho_1}{\rho_m} \frac{d_1}{r_0} - 3 \frac{\rho_2}{\rho_m} \frac{d_2}{r_0} - 3 \frac{\rho_3}{\rho_m} \frac{h}{r_0} + 3 \frac{\rho_3}{\rho_m} \frac{d_1 + d_2}{r_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{Q}{\rho_m} \frac{(h - d_1 - d_2)^2}{r_0 - 2h} \right] \\ g &= g_0 \left\{ 1 + \frac{h}{r_0} \left(2 - 3 \frac{\rho_3}{\rho_m} \right) + 3 \frac{d_1}{r_0} \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_m} \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{d_2}{r_0} \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_m} - \frac{3}{2} \frac{Q}{\rho_m} \frac{(h - d_1 - d_2)^2}{r_0 - 2h} \right\} \dots \dots \dots (158) \end{aligned}$$

Wenn wir nunmehr die einzelnen Glieder dieser Gleichung betrachten, so finden wir, daß die letzten drei Glieder keine erhebliche Bedeutung haben. Die Dichte nimmt in den obersten 1000 km um höchstens eine Einheit zu (vgl. S. 462), Q ist also von der Größenordnung 1 : 1000. Für $h = 300$ km wird also das letzte Glied etwa 1 : 1000, d. h. es bewirkt, daß g dort um eine Einheit der dritten Stelle kleiner ist als an der Erdoberfläche. In den beiden vorangehenden Gliedern ist d_1 und d_2 nach den Beobachtungen etwa 20 km, $(\rho_3 - \rho_1) : \rho_m$ ist höchstens $\frac{2}{10}$, $(\rho_3 - \rho_2) : \rho_m$ ist noch kleiner, die beiden Glieder liefern zusammen höchstens $\frac{2}{1000}$. Die letzten drei Glieder in Gleichung (158) liefern also zusammen höchstens $0,001 \pm 0,001$ bis zu Tiefen von 300 km, d. h. Gleichung (158) reduziert sich innerhalb der angegebenen Grenzen auf

$$g = g_0 \left[1 + \frac{h}{r_0} \left(2 - 3 \frac{\rho_3}{\rho_m} \right) + H \right] \dots \dots \dots (159)$$

wo H ein Korrektionsglied ist, das kleiner als 0,002 ist.

Aus Gleichung (159) erkennt man zunächst, daß in den obersten 300 km angenähert $g = g_0$, wenn

$$\rho_3 : \rho_m = \text{etwa } \frac{2}{3},$$

also $\rho_3 = \text{etwa } 3,7$. Ist die Dichte des Sima an der Grenze nach dem Sial kleiner als 3,7, was wohl sicher der Fall ist, so wächst die Schwere mit der Tiefe. Wäre dagegen die Dichte größer, so würde g abnehmen. Für ρ_3 kommen etwa Werte zwischen 3,0 und 3,4 in Frage. Wir erhalten dementsprechend die in Tabelle 48 angegebenen Werte für die Schwere in den obersten 300 km der Erdkruste, wobei $H = 0,001$ gesetzt wurde.

Zweierlei ist im ersten Augenblicke überraschend: daß man die Schwere überhaupt berechnen kann, ohne die Massenverteilung im Erdinnern zu kennen, und daß die Schwere um so langsamer zu- bzw. um so stärker abnimmt, je größer die Dichte in den in Frage kommenden Schichten ist. Beide Tatsachen hängen zusammen, denn die Massenverteilung steckt in der Kombination der mittleren Erddichte mit dem Dichtegesetz in der Erdkruste, und zwar muß die Dichte

im Innern um so kleiner sein, also auch die Schwere außen, je größer die Dichte außen ist. Ganz ähnlich würde übrigens eine starke Zunahme der Dichte im Mantel eine kleinere Dichte im Kern zur Folge haben müssen, also geringere Zunahme der Schwere außen. In der Tat wäre dann Q im letzten Glied der Gleichung (158) größer und somit g kleiner.

Tabelle 48
Schwere in der Erdkruste

Dichte des Sima oben	Tiefe in km			
	0	100	200	300
3,0	981	987	993	999
3,2	981	986	990	994
3,4	981	984	986	989
3,7	981	981	981	981

Gleichung (158) gilt auch, wenn man nur die oberste Schicht betrachtet ($d_1 = d_2 = 0$). Für die Kontinente ist dann $\rho = 2,8$ und $g = g_0 (1 + 0,000078 h)$, für die Ozeane ($\rho = 1$) wird $g = g_0 (1 + 0,00022 h)$, wo h in km zu nehmen ist und g_0 in cm/sec: In 10 km Tiefe wäre also im Kontinent für $g_0 = 981$ die Schwere $g_{10} = 981,8$ cm/sec², am Meeresboden in der gleichen Tiefe 983,2 cm/sec².

§ 154. Der Druck im Erdinnern. Nachdem wir nunmehr die Dichte und die Schwere im Erdinnern kennen, können wir auf Grund der Gleichung (150) den Druck p berechnen. Es ist im Falle des hydrostatischen Gleichgewichts (vgl. Band 1):

$$r = \int_r^{r_0} \rho g dr \quad \dots \dots \dots (160)$$

Figur 157 zeigt das Ergebnis der Integration unter den verschiedenen Voraussetzungen über die Dichte. Zur Umrechnung der im CGS-System gewonnenen Werte in Atmosphären ist die Beziehung

$$10^6 \text{ Bar} = 1 \text{ Megabar} = 10^6 \text{ Dyn/cm}^2 = 1 \text{ Megadyn/cm}^2 = 0,987 \text{ Atm.}$$

zu benutzen¹⁾. Manchmal wird der Druck in Megabar = 10^6 Bar angegeben. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß oftmals, vor allem in der Meteorologie, international abweichend hiervon 1 Bar = 10 Dyn/cm², also 1 Bar = 0,987 Atm., gesetzt wird (vgl. Bd. 9).

Für die Erdkruste kann man für die Dichte und die Schwere die gleichen Ansätze benutzen, die wir im vorigen Paragraphen vorausgesetzt bzw. gefunden hatten. Es genügt jedoch für alle Zwecke vollständig, wenn wir eine Schicht mit der Dicke D und einer mittleren Dichte 2,8 voraussetzen (Sial) und darunter eine Schicht mit der Dicke ($h - D$), konstanter Dichte und einer mittleren konstanten Schwere, die sich aus Tabelle 48 ergibt. In Tabelle 49 sind so gewonnene Werte für die Erdkruste zusammengestellt.

Die seither berechneten Werte setzen voraus, daß in der Erde hydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Die Existenz der Isostasie, das heißt die Tatsache, daß über einer Niveaufäche in mindestens 40 km, höchstens 120 km Tiefe in großer Annäherung überall gleiche Massen liegen (vgl. Band 1), ist gleichbedeutend mit

¹⁾ 1 Megabar = 10^6 Bar = 0,98703 Atm = 1,019 kg (Gewicht)/cm².
1 Atm = 1,0333 kg (Gewicht)/cm² = 1,0137 Megadyn/cm².

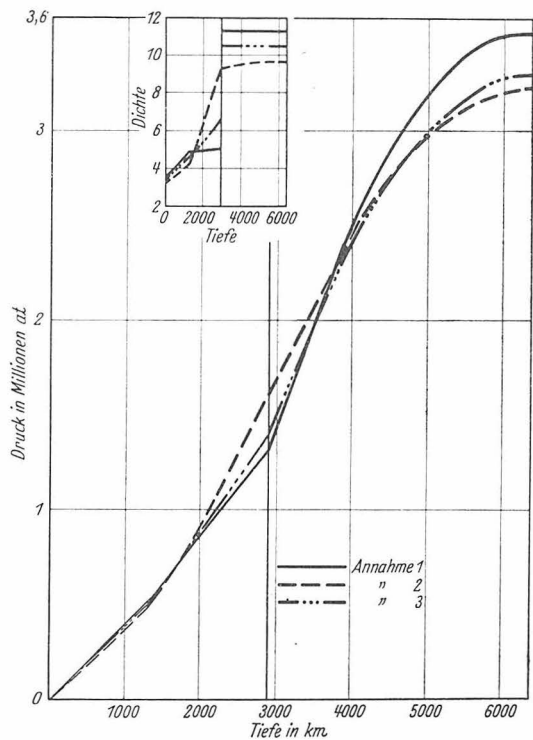


Fig. 157
Druck im Erd-
innern unter Vor-
aussetzung der in
der Nebenfigur
angegebenen
Werte für die
Dichte im Erd-
innern

Tabelle 49
Druck in der Erdkruste unter verschiedenen Annahmen
und unter Voraussetzung von hydrostatischem Druck

- a) von 0—40 km Tiefe beträgt die Dichte 2,8, darunter $3,0 + \frac{h - 40}{1000}$
b) „ 0—40 km „ „ „ „ 2,8, „ $3,2 +$ „
c) „ 0—40 km „ „ „ „ 2,8, „ $3,4 +$ „
d) „ 0—40 km „ „ „ „ 1 (Wasser) darunter bis 40 km Tiefe
3,1, darunter wie im Falle b. Die Fälle a bis c entsprechen einem Kontinent, der
auf Sima mit verschiedener Dichte ruht, der Fall d dem Pazifischen Ozean

Tiefe h in km	Druck in Megabar/cm ² im Falle			
	a	b	c	d
1	275	275	275	100
5	1370	1370	1370	500
10	2750	2750	2750	1870
20	5500	5500	5500	4900
30	8250	8250	8250	7950
40	11000	11000	11000	11000
50	13900	14140	14340	14140
60	16800	17300	17700	17300
70	19700	20400	21100	20400
100	29000	30000	31000	30000
150	45000	46000	48000	46000
200	60000	63000	66000	63000
300	92000	97000	102000	97000
400	125000	132000	139000	132000

der Existenz von angenähertem hydrostatischem Gleichgewicht in dieser Tiefe. Es ist ferner sehr wahrscheinlich, daß auch in größeren Tiefen angenähert hydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Dagegen ist dies in den äußeren Schichten des Mantels zweifelhaft. Hier können elastische Spannungen auftreten, die von dem oben berechneten hydrostatischen Druck verschieden sind.

§ 155. Die nach der Elastizitätstheorie durch die Schwere bewirkten Spannungen in der Erdkruste. Läßt man die Voraussetzung, daß in der ganzen Erde hydrostatischer Druck herrsche, fallen, so kann man versuchen, die Gleichungen (120) bis (125) zu verwenden. Eine Auswertung unter verschiedenen Annahmen scheint nur durch K. FEURSTEIN¹⁾ 1912 erfolgt zu sein. Er führte die Rechnungen für folgende Fälle durch:

1. Die Erde ist fest, kompressibel und homogen.
2. Der Kern (Radius 4870 km entsprechend den damaligen Ansichten) ist inkompressibel, seine Dichte ist 8,2; der Mantel bis 100 km unterhalb der Erdoberfläche ist flüssig und inkompressibel, seine Dichte ist 3,3; in den äußersten 100 km sind die elastischen Konstanten durch die Beziehung $(\lambda + 2\mu): \rho = 4,5597 \cdot 10^{12} - 6,351 r$ gegeben, die Dichte ist ebenfalls 3,3.
3. Der Kern (Radius und Dichte wie im Fall 2) ist kompressibel ($k = 8,23 \cdot 10^{12}$), ebenso der Mantel ($k = 2,19 \cdot 10^{12}$ CGS), die äußersten 100 km haben die gleichen Eigenschaften wie im Falle 2.
4. Die Rigidity ist überall klein gegenüber der Kompressibilität, die übrigen Werte sind die gleichen wie im Fall 3.
5. Die Erde besteht aus Kern und Mantel (Radien wie vorher, aber ohne 100-km-Schale), die elastischen Konstanten sind die von WIECHERT gefundenen (z. B. im „Kern“ $\mu = 3,87 \cdot 10^{12}$, $k = 8,23 \cdot 10^{12}$ CGS).

Tabelle 50

Spannungen (N = normal, T = tangential) in Megadyn/cm² im Erdmantel unter verschiedenen Voraussetzungen (siehe oben) nach Rechnungen von FEURSTEIN

Tiefe km	Hy- dros- t. Druck	Fall 1		Fall 2		Fall 3		Fall 4		Fall 5	
		N	T	N	T	N	T	N	T	N	T
0	0	0	395300	0	320	0	84000	0	123000	0	200000
30	8250	12500	404000	10000	4000	9400	91000	9000	131000	9000	>200000
100	30000	?	?	34600	13200	31500	108300	30100	153000	?	?
500	160000	201000	537000	165000		162000		160000		?	?
1000	360000	386000	667000	330000		330000		330000		?	?

FEURSTEIN setzte weiter in allen Fällen voraus, daß die Radialspannungen an der Erdoberfläche Null sind, daß im Erdmittelpunkt keine Verschiebungen stattfinden, und daß „flüssig“, d. h. Vorhandensein von hydrostatischem Gleichgewicht, gleichbedeutend mit Fehlen von Rigidity ist. Dies trifft zweifellos nicht zu. Bei der Betrachtung der Ergebnisse (Tabelle 50) ist zu beachten, daß die benutzten Formeln nur für einen völlig elastischen Körper gelten, die Erde aber bei Manteldrücken von der Größenordnung von 10^4 Megadyn/cm² im Mantel, und in einigen Zehnern von Kilometern schon bei wesentlich kleineren Drücken

¹⁾ Elastischer Zustand und Spannungsverteilung im Erdinnern. Dissertation, Freiburg, 1912.

zu fließen beginnt, so daß derartige Differenzen zwischen den Normal- und Tangentialspannungen, wie sie Tabelle 50 in allen Fällen zeigt, überhaupt nicht möglich sind. Weiter darf man aber auch nicht übersehen, daß die Gleichungen nur anwendbar sind für eine Kugel, die ursprünglich kräftefrei war und dann einem Kraftfeld unterworfen wurde. Bei der Erde trifft dies nicht zu, wir müssen vielmehr annehmen, daß sie ursprünglich ganz aus geschmolzenem Material bestand, das sich im hydrostatischen Gleichgewicht befand. Wenn nun Kristallisation ohne Volumenänderung erfolgte, so blieb der Zustand ungeändert, das heißt, es herrschte also auch weiterhin hydrostatisches Gleichgewicht. Spannungen konnten nur durch Volumenänderungen entstehen; diese haben aber für uns hier kein Interesse, sie sind in Band 3 des Handbuches behandelt.

Auch wenn die Erde nicht auf diese Weise entstanden wäre, könnten die Gleichungen (120) bis (125) nicht angewandt werden, da in allen Fällen die Spannungsunterschiede in den größten Teilen der Erde wesentlich größer sind als der Fließwiderstand (strength), so daß es zu Fließbewegungen kommen müßte, die eine wesentliche Annäherung an das hydrostatische Gleichgewicht zur Folge hätten. Insbesondere wären nach der Theorie alle Spannungen an der Erdoberfläche nur dann Null, wenn die Verschiebung U dort Null ist, was gleichbedeutend mit völliger Inkompressibilität der Erde wäre. Die verhältnismäßig geringen Unterschiede der Spannungen in Fall 2 der Tabelle 50 beruhen lediglich auf der dort von FEURSTEIN gemachten Annahme, daß nur die obersten 100 km der Erdkruste kompressibel seien, darunter Mantel und Kern inkompressibel. Selbst wenn man annimmt, daß in der Tiefe H der isostatischen Ausgleichsfläche Normal- und Tangentialspannungen gleich sind, ergeben sich für die Erdoberfläche Tangentialspannungen von der Größenordnung der Radialdrucke in der Tiefe $0,6 H$, also für $H = 60$ km etwa 17000 Atmosphären. Setzt man die Radialspannungen an der Erdoberfläche Null, so sind die Tangentialspannungen dort lediglich proportional den Verrückungen U_0 , gleichgültig, welche Annahmen man sonst macht, das heißt die Tangentialspannungen an der Oberfläche einer solchen Kugel hängen, wie schon FEURSTEIN gefunden hatte, in erster Linie von der Kompressibilität im Innern der Kugel ab; je größer diese ist, desto größer sind die Tangentialspannungen an der Kugeloberfläche. Ein Schluß von den Spannungsdifferenzen auf die Richtigkeit der Voraussetzungen, die in dem betreffenden Fall gemacht wurden, ist nicht möglich. Wir setzen also am besten hydrostatisches Gleichgewicht bei Berechnung der Drucke im Erdinnern voraus, wie es im vorigen Paragraphen geschehen ist. Im übrigen zeigen die Untersuchungen von FEURSTEIN, daß die Radialdrucke im Erdinnern unter den verschiedenen Annahmen keine wesentlichen Unterschiede zeigen, daß also die Voraussetzungen das Ergebnis nicht stark beeinflussen.

Von Interesse ist noch die Frage, in welcher Tiefe wir etwa hydrostatisches Gleichgewicht annehmen müssen. Die Rechnungen geben zwar hierauf keine präzise Antwort, die Rechnung in Fall 2 der Tabelle 50 zeigt aber, daß wir selbst bei Annahme einer nur 100 km dicken Schicht mit absolut elastischem Material zu Spannungsdifferenzen von der Größenordnung $20 \cdot 10^9$, also einem Vielfachen des Fließwiderstandes, zwischen horizontalen und vertikalen Spannungen kommen, so daß Fließbewegungen eintreten müssen, die das System dem hydrostatischen Druck verhältnismäßig nahe bringen. Das System der elastischen Spannungen kann nur etwa bis zu einer Tiefe von der Größenordnung von 10 km gelten. Eine Anwendung der elastischen Gleichungen stößt aber auch in diesem Falle auf Schwierigkeiten, da die Grenzbedingungen zu unsicher sind. Man kann lediglich annehmen, daß an der Erdoberfläche radiale Spannungen fehlen. Dies führt nach (124) auf

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + 2\lambda \left(\frac{U}{r} \right)_0 = 0.$$

Setzt man noch $\lambda = \mu$, was mit genügender Annäherung zutrifft, so wird

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 = -\frac{2}{3} \left(\frac{U}{r} \right)_0 \quad \dots \quad (161)$$

und für die Tangentialspannungen an der Erdoberfläche ergibt sich nach (125)

$$T_0 = -\frac{10}{3} \frac{\mu_0}{r_0} U_0 \quad \dots \quad (162)$$

wo U_0 die Kompression der rein elastischen Schicht durch die Schwere ist.

Kapitel 15

Die Righeit im Erdinnern

§ 156. Allgemeines über den Righeitsmodul. Der Righeitsmodul kann durch (95) definiert werden:

$$\mu = \frac{T}{2(\Delta\psi)} \quad \dots \quad (163)$$

wo $\Delta\psi$ die notwendige Torsion ist, um eine Tangentialspannung T hervorzurufen. Im allgemeinen geht man jedoch von der Wirkung eines Drehmomentes D auf einen Draht aus. Wird dieses durch ein Gewicht P hervorgerufen, das an einem Hebelarm l angreift, so ist¹⁾, falls R = Drahtradius

$$D = Pl = \int_0^{2\pi} \int_0^R (T_1 x - T_2 y) d\psi dr \quad \dots \quad (164)$$

Führt man an Stelle der im Draht- bzw. Zylinderquerschnitt liegenden Koordinaten x und y Polarkoordinaten r und λ ein, so daß also

$$x = r \cos \lambda \quad y = r \sin \lambda,$$

so wird im Falle der reinen Torsion

$$T_1 = -c\mu r \sin \lambda \quad T_2 = c\mu r \cos \lambda,$$

wo c eine Konstante ist. (164) führt somit auf

$$D = \frac{\pi}{2} c\mu R^4 \quad \dots \quad (165)$$

Nun dreht sich bei kleiner Torsion jeder Querschnitt um $\psi = cz$; setzt man c aus (165) ein, so erhält man

$$\psi = \frac{2D}{\pi\mu R^4} z \quad \dots \quad (166)$$

und insbesondere für die Verdrillung φ des freien Endes ($z = l$)

$$\varphi = \frac{2D}{\pi\mu R^4} l \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{2Dl}{\pi\varphi R^4} \quad \dots \quad (167)$$

¹⁾ Vgl. z. B. AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Bd. 3, S. 210. Leipzig, 1927.

Wird also ein Draht eines Körpers mit der Länge l und dem Radius R vertikal aufgehängt, das obere Ende eingeklemmt, und zeigt das untere Ende eine Torsion φ , wenn auf es ein Drehmoment D einwirkt, so liefert (167) den Righheitsmodul. Dieser ist also bei gleichen äußeren Bedingungen umgekehrt proportional der durch das Drehmoment bewirkten Verdrehung. Tordiert sich der Körper überhaupt nicht, d. h. ist er völlig starr gegenüber Kräften, die seine Form zu verändern suchen, so ist $\mu = \infty$. Das gleiche ergibt sich natürlich auch aus (163); der Vergleich von (163) mit (166) liefert

$$T = \frac{4 D l}{\pi R^4} \dots \dots \dots (168)$$

Bei Körpern mit geringer Richtigkeit ist μ klein, für Flüssigkeiten ist φ sehr groß, μ praktisch Null.

§ 157. Messung des Righheitsmoduls. Die einfachste Methode zur Bestimmung von μ für Stäbe oder Drähte besteht darin, daß man den betreffenden Draht oder Stab am einen Ende einklemmt, am anderen Ende eine Scheibe befestigt, die man mit bestimmten Gewichten tordiert, und den Torsionswinkel mit Spiegel und Skala abliest (vgl. z. B. ¹⁾). Neben dieser statischen wird noch eine dynamische Methode angewandt. Belastet man einen Draht mit einem Körper mit dem Trägheitsmoment Θ , tordiert ihn und überläßt ihn dann sich selbst, so wird

$$\mu = \frac{8 \pi l \Theta}{r^4 T^2},$$

wobei T die Schwingungsdauer, l die Länge und r der Radius des Drahtes ist. Auch hier wurden verschiedene Anordnungen für die praktische Durchführung der Methode verwandt (vgl. a. a. O.).

Ein wesentlicher Unterschied in den Ergebnissen, die nach beiden Methoden gewonnen wurden, ist bisher nicht festgestellt worden. Nur für Eisen wurde kinetisch ein Wert gefunden, der 2 % größer war als der statisch gefundene.

§ 158. Beobachtete Werte von Righheitskoeffizienten. Rechnet man im absoluten Maß, so erhält man den Righheitskoeffizienten in Dyn/cm². In der Praxis findet man jedoch vielfach Angaben in Einheiten des praktischen Systems, und zwar meist Kilogrammgewicht/mm². Um aus diesen Werten die Zahlen im CGS-System zu erhalten, muß man in unseren Breiten mit $0,981 \cdot 10^8$ multiplizieren.

Tabelle 50a
Righheitskoeffizienten μ verschiedener Substanzen bei Zimmertemperatur und 1 Atm. Druck in Dyn/cm². Alle Werte sind mit 10^{11} zu multiplizieren. (Meist nach AUERBACH-HORT, a. a. O.)

A. Metalle. Grenzwerte und wahrscheinlichster Mittelwert					
Aluminium . . .	2,6—3,3	2,7	Blei :	0,5—0,8	0,7
Eisen	7,3—8,3	7,9	Stahl	7,8—8,4	8,1
Gold	2,5—3,9	3,0	Kupfer	3,6—4,7	4,2
Magnesium . . .	1,1—1,7	1,6	Nickel	7,3—9,5	8,1
Platin	6,5—7,2	6,8	Silber	2,4—2,9	2,7
Zink	1,6—3,9	3,1	Zinn	1,5—1,8	1,6

B. Jenaer Gläser: 1,8—3,3

¹⁾ AUERBACH-HORT, a. a. O.

C. Gesteine

Archaisch Chloritschiefer . . .	2,4—3,2
„ Serpentin	1,6—2,2
Paläozoisch Tafelspat	1,9—2,5
„ Kalkstein	2,2—3,0
„ Marmor	1,2—3,0
„ Granit	0,5—2,5
Mesozoisch Sandstein	0,2—0,6
Tertiär Ryolith-Tuff	0,3—0,7
Diluvialer Tuff	0,1—1,1
„ Andesit	0,2—1,9
Silikatglas	1,5—3,1

Die in der Literatur angegebenen Werte sind nur in den seltensten Fällen direkt beobachtet, vielmehr ist μ meist aus beobachteten Werten des Elastizitätsmoduls E und der Poissonschen Konstanten σ nach (100) berechnet worden. In Tabelle 50a ist eine Reihe von nach verschiedenen Methoden beobachteten Werten zusammengestellt.

Die Tabellen zeigen, daß die Grenzen für die einzelnen Stoffe recht weit auseinanderliegen. Zum Teil mag dies durch Beobachtungsunsicherheiten bedingt sein, zum Teil sind diese Unterschiede aber reell. Besonders die Porosität der verschiedenen Stücke ist zweifellos von erheblichem Einfluß auf die Richtigkeit, wie auf alle Eigenschaften des betreffenden Materials.

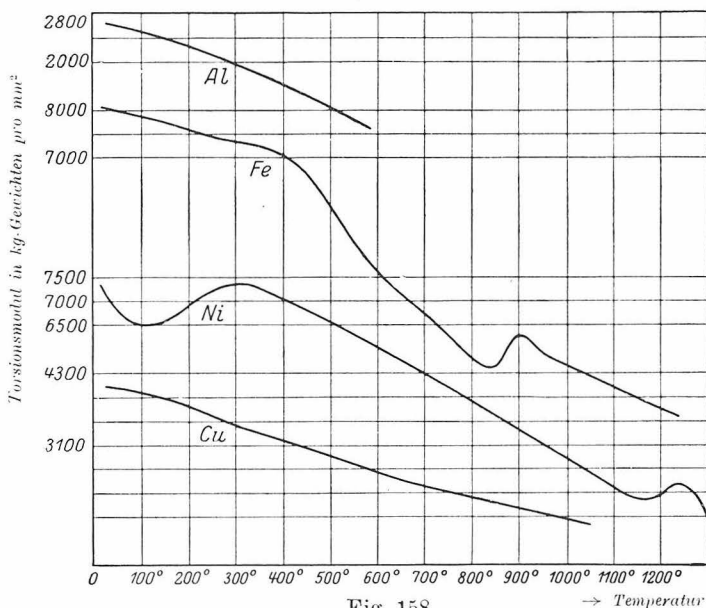


Fig. 158

Abhängigkeit des Torsionsmoduls von der Temperatur.

Nach AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Bd. 3

§ 159. Einfluß von Druck und Temperatur auf den Torsionsmodul. Die Untersuchungen des Torsionsmoduls von Metallen — bei anderen Stoffen fehlen anscheinend umfangreichere Beobachtungen — ergaben, daß der Modul im allgemeinen mit wachsender Temperatur etwas stärker als linear abnimmt. Fig. 158

zeigt einige beobachtete Kurven; die Angaben sind in Einheiten des praktischen Systems gemacht. In den gleichen Einheiten fand SLORRE folgende mittlere Werte des Torsionsmoduls bei der Temperatur t

Silber	3153	(1 — 0,000675 t — 0,00000075 t^2)
Kupfer	4728	(1 — 0,000560 t — 0,00000040 t^2)
Nickel	7796	(1 — 0,000533 t — 0,000000598 t^2)
Eisen	8396	(1 — 0,000527 t — 0,00000176 t^2)
Aluminium	2703	(1 — 0,000239 t — 0,00001053 t^2)

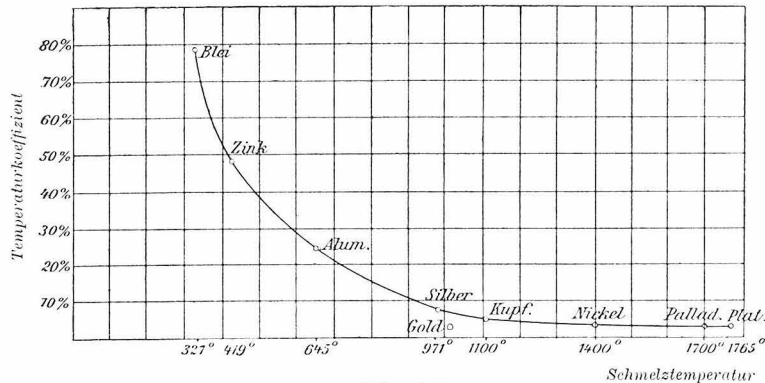


Fig. 159
Negativer Temperaturkoeffizient des Torsionsmoduls in Prozenten zwischen Zimmertemperatur und einer Kältemischung nach SCHÄFER, aufgetragen als Funktion der Schmelztemperatur.
Nach AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Bd. 3

Der Righheitsmodul nimmt im allgemeinen um so stärker mit steigender Temperatur ab, je niedriger die Schmelztemperatur des Stoffes ist, wie Fig. 159 zeigt. Nach SUTHERLAND wäre

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \dots \dots \dots (169)$$

wo μ der Righheitsmodul bei der absoluten Temperatur T ist und μ_0 der entsprechende Wert bei der absoluten Schmelztemperatur T_0 .

Tabelle 50 b
Righheitsfaktoren bei verschiedenem Druck unter der Voraussetzung, daß die Poissonsche Konstante den Wert 0,27 hat. Nach ADAMS u. WILLIAMSON. Angaben in Dyn/cm², alle Werte sind mit 10¹¹ zu multiplizieren

Gestein	μ bei einem Druck von	
	2000	10000 Atm
Granit	2,6	2,9
Granodiorit	3,0	3,3
Syenit	2,9	3,2
Diorit	3,4	3,6
Gabbro	4,5	4,6

Der Einfluß des Druckes auf den Torsionsmodul scheint überhaupt nicht direkt untersucht worden zu sein. Es liegen lediglich Angaben von ADAMS und WILLIAMSON vor, die μ für höhere Drucke berechneten unter der Voraussetzung, daß die POISSONSche Konstante in allen Fällen den Wert 0,27 hat, was wohl im allgemeinen zutreffen dürfte. In diesem Falle ist nach (100)

$$\mu = 0,543 k$$

wo k der Inkompressibilitätsfaktor ist. Da also vorausgesetzt ist, daß μ proportional k ist, können wir uns auf den Hinweis auf die genaueren Untersuchungen in Kapitel 16 beschränken. Die Werte sind in Tabelle 50b (S. 475) zusammengestellt.

§ 160. Die Richtigkeit von Schmelzen. Ein Problem, das immer und immer wieder in der Geophysik auftauchte, war die Frage, ob das Erdinnere flüssig oder fest sei. Dies Problem ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Richtigkeit des Erdinnern, denn wir bezeichnen einen Körper als fest, wenn er eine meßbare Richtigkeit besitzt, als flüssig, wenn ihm diese fehlt, er jedoch bei Druckverminderung sein Volumen nur wenig ändert, und schließlich als gasförmig, wenn er jeden gebotenen Raum einnimmt.

Nun zeigen die Geschwindigkeiten der Erdbebenwellen, daß das Erdinnere bis zum Kern fest ist, andererseits führen terminische Betrachtungen auf die Möglichkeit, daß das Erdinnere zum Teil noch geschmolzen ist. Lange Zeit hindurch hielt man diese beiden Ergebnisse für nicht verträglich miteinander, da man flüssig = geschmolzen und fest = kristallin setzte, da bei Zimmertemperatur diese Begriffe sich im allgemeinen in der Tat paarweise decken. Nachdem man aber auf der einen Seite „flüssige Kristalle“ und auf der anderen feste Schmelzen festgestellt hatte, sah man die Unrichtigkeit dieser Auffassung ein, zumal Untersuchungen von TAMMANN ergaben, daß mit wachsendem Druck der Unterschied der Eigenschaften von kristallisiertem und geschmolzenem Material immer kleiner wird. Leider liegen genauere Beobachtungen über den Richtigkeitskoeffizienten von Schmelzen nicht vor.

§ 161. Der Zusammenhang zwischen Richtigkeit und Transversalwellengeschwindigkeit. Nach (138) ist $\mu = \rho \mathfrak{V}^2$. Wenn wir also die Dichte ρ und die Geschwindigkeit \mathfrak{V} von Transversalwellen kennen, können wir die Richtigkeit berechnen. Sieht man von unwahrscheinlichen Komplikationen ab, so gilt die angegebene Beziehung nur dann nicht, wenn Absorption vorhanden ist, das heißt wenn ein Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt wird (vgl. Band 4). Dies ist in der Tat der Fall, jedoch nur in geringem Maße. Da überdies in erster Linie die Geschwindigkeit langer Wellen hiervon betroffen wird, wird sich bei Nahbeben mit ihren kurzen Wellen dieser Einfluß kaum bemerkbar machen, das heißt wir erhalten auf diese Weise μ wenigstens für die obersten Schichten hinreichend genau. Für größere Tiefen ist dagegen der Wert für die Dichte so unsicher, daß dagegen die Wirkung einer Abweichung von der angegebenen Gleichung nicht in Frage kommt.

§ 162. Die Richtigkeit im Erdinnern nach den Ergebnissen über die Geschwindigkeit der Transversalwellen. Die Untersuchung der Transversalwellen, insbesondere deren Laufzeitkurven, führte auf Geschwindigkeiten für die verschiedenen Tiefen bis zum Erdkern, die auf mindestens 5% genau sind. Leider sind die Werte für die Dichte weniger sicher. Auf Grund der Ergebnisse für beide Größen (Fig. 153 S. 455 bzw. Fig. 155 S. 462) wurden die Tabelle 51 und die Kurven 1—3 der Fig. 160 gewonnen.

Tabelle 51
Righeitsmodul in verschiedenen Teilen der Erdkruste auf Grund der Geschwindigkeit von Transversalwellen, in Dyn/cm². Alle Wertesind mit 10¹¹ zu multiplizieren

Tiefe in km	3	25	50
Süddeutschland	2 ³ / ₄	3 ¹ / ₂	6 ¹ / ₂
Japan	2 ³ / ₄	4	6 ¹ / ₂
Atlantischer Ozeanboden .	(3)	6	6 ¹ / ₂
Pazifischer „ .	ca. 5	6	6 ¹ / ₂

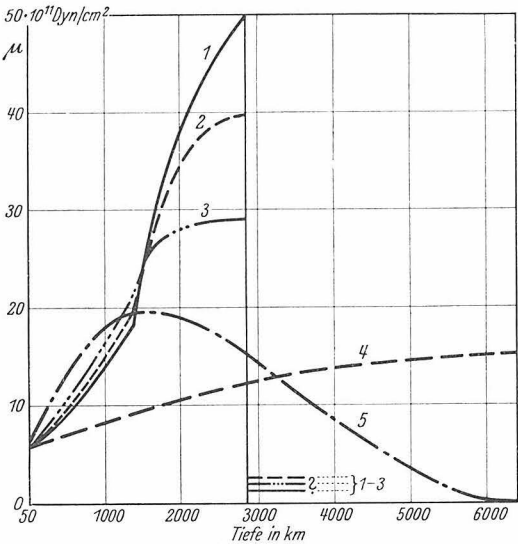


Fig. 160
Righeit im Erdinnern.

1—3 auf Grund der Ergebnisse über die Geschwindigkeit von Transversalwellen im Erdinnern; für die Dichte wurden folgende Werte der Tabelle 46 angenommen: für 1 Spalte A1, für 2 Spalte B1, und für 3 Spalte D2. Kurve 4 nach PREY unter der Voraussetzung, daß μ im Erdinnern stetig zunimmt (vgl. S. 492). Kurve 5 nach PREY unter der Voraussetzung, daß μ erst stetig zu- und dann stetig auf Null im Erdmittelpunkt abnimmt. Die Kurven 4 und 5 befriedigen die Ergebnisse über die Gezeiten des Erdkörpers und über die Periode der Polschwankungen

§ 163. Allgemeines über die Righeit der Erde nach den Beobachtungen über ihre Deformation durch kosmische Kräfte. Neben diesen Ergebnissen auf Grund der Erdbebenwellen lassen sich auch Angaben über die Righeit der Erde als Ganzes machen unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Gezeitenkräfte die Erde deformieren, wobei die Deformation von der Righeit der ganzen Erde abhängt, und daß auch die Periode der Polbewegung durch diese bestimmt wird (vgl. Band 1). Wäre die Erde absolut unnachgiebig, so müßte sich der Pol mit der EULERSchen Periode von 304 Tagen um die Mittellage bewegen; bei einer flüssigen

Erde wäre diese Zeit unendlich groß; der wahre Wert liegt je nach der Richtigkeit der Erde zwischen diesen beiden Extremen.

Die ersten Versuche zur Bestimmung der Richtigkeit der Erde auf diese Weise¹⁾ setzten voraus, daß die Erde homogen sei. Es zeigte sich jedoch, daß die verschiedenen Beobachtungen dann nicht gleichzeitig gedeutet werden können, so daß dann später Versuche gemacht wurden, andere Gesetze für die Dichte und die Richtigkeit im Erdinnern anzunehmen.

Die wesentlichsten Größen, die bei diesen Untersuchungen in Frage kommen, sind

q , das Verhältnis der elastischen Verschiebung, welche durch den Vorgang an der Erdoberfläche bewirkt wird, zur Gleichgewichtshöhe²⁾, und

h , die dadurch bedingte Änderung des Potentials.

Im Falle der Gezeiten des Erdkörpers sei U die Radialkomponente der elastischen Verschiebung an der Erdoberfläche, W das Potential der Flutkraft, V_0 das Potential der Schwere an der Erdoberfläche der nicht deformierten Erde, V seine Änderung infolge der Gestaltsänderung der Erde, so ist das Potential sämtlicher Kräfte an der deformierten Oberfläche

$$R = V_0 + U \frac{\partial V_0}{\partial r} + V + W \dots \dots \dots (170)$$

Die Schwerebeschleunigung ist angenähert

$$g = - \frac{\partial V_0}{\partial r} \dots \dots \dots (171)$$

Ferner ist nach der Definition von q und h

$$U = q \frac{W}{g} \quad V = h W \dots \dots \dots (172)$$

Nach (171) und (172) ist

$$U = -q W \frac{\partial r}{\partial V_0} \dots \dots \dots (172a)$$

also nach (170) bis (172a)

$$R = V_0 - q W + h W + W = V_0 + W (1 + h - q) \dots \dots (173)$$

¹⁾ Aus der Literatur: G. H. DARWIN, Scientific Papers, Vol. 1, S. 340 ff. — A. E. H. LOVE, The yielding of the earth. Proc. Roy. Soc., London, 82. — J. LARMOR, The relation of the earth's free precessional nutation, ebenda. — S. S. HOUGH, The rotation of an elastic spheroid. Phil. Transact., London, Ser. A, 187, 1896. — G. HERGLOTZ, Über die Elastizität der Erde. Zeitschr. f. Mathematik und Physik. 52, 275, 1905. — A. E. H. LOVE, Some problems of geodynamics. Cambridge, 1911. — W. SCHWEYDAR, Gerlands Beitr. z. Geophysik, Band 9. — Derselbe, Veröffentl. des Geodätischen Instituts, Potsdam, Neue Folge, 54, 1912. — Derselbe, Theorie der Deformation der Erde durch Flutkräfte. Veröffentl. des Geodätischen Instituts, Potsdam, Neue Folge 66, 1916. — Derselbe, Lotschwankung und Deformation der Erde durch Flutkräfte. Zentralbureau der Internat. Erdmessung, Neue Folge, 38, Berlin, 1921. — A. PREY u. a., Einführung in die Geophysik, Berlin, 1922. — H. JEFFREYS, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., London, Geophys. Suppl. 1, 371, 1926. — Derselbe, The earth, 2nd edition. Cambridge, 1929. — L. M. HOSKINS, The strain of a gravitating sphere . . . Transact. Amer. mathem. Soc., 21, 1920. — A. PREY, Über die Elastizitätskonstante der Erde. Gerlands Beitr. z. Geophysik, 23, 379, 1929.

²⁾ Wir benutzen hier den Buchstaben q an Stelle des sonst üblichen k , da wir mit k den Inkompressibilitätsfaktor bezeichnen.

Die Kraft, die dem Gliede $W(1 + h - q)$ entspricht, hat eine Komponente, die in der deformierten Erdoberfläche liegt. Bezeichnet ds das Bogenelement in einer beliebigen Richtung auf der Erdoberfläche, so ist diese horizontale Komponente

$$K_h = \frac{\partial W}{\partial s} (1 + h - q) \dots \dots \dots (174)$$

und die durch sie hervorgerufene Winkelablenkung eines Pendels

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial s} \frac{1 + h - q}{g} \dots \dots \dots (175)$$

$\frac{q}{g} \frac{\partial W}{\partial s}$ ist der Winkel, den die deformierte mit der ursprünglichen festen Oberfläche bildet. Da die Änderung des Potentials der Schwere $W + hW$ beträgt, so ist $\frac{\partial W}{\partial s} \frac{1 + h}{g}$ der Winkel, den die neue Niveaulfläche mit derjenigen vor der Deformation bildet. Gibt die Oberfläche nicht nach, so ist $q = h = 0$; gibt sie völlig nach, so ist nach (173) $q = 1 + h$. Im Falle der absolut starren Erde wird

$$\gamma_{st} = \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial s} \dots \dots \dots (176)$$

Demnach ist das Verhältnis $\gamma = \gamma : \gamma_{st}$ der wirklichen Lotstörung zur Lotstörung auf einer völlig starren Erde gegeben durch

$$\gamma = 1 + h - q \dots \dots \dots (177)$$

Der Wert von γ ist durch Pendelregistrierungen feststellbar (vgl. Bd. I), somit erhält man auf diesem Wege $h - q$.

Auch die Beobachtung der Meeresgezeiten liefert $h - q$. Die Verschiebung des Wassers durch die Gezeitenkräfte ist ohne Berücksichtigung der Änderung der Anziehung, die durch die Verschiebung des Wassers selbst entsteht, gegeben durch $W(1 + q) : g$; die Erhebung des festen Landes ist $hW : g$; mithin beobachten wir an einem Wasserstandsmesser die wirkliche Fluthöhe $\frac{W}{g} (1 + q - h)$ und können auch hieraus $K = q - h$ finden.

Wie erwähnt, hängt aber auch die Periode der Polschwankungen der Erde (vgl. Band I) von der Righeit der Erde ab. Nach LOVE ist

$$h = \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau}\right) \left(\frac{2\alpha - \beta}{\beta}\right) \dots \dots \dots (178)$$

wo τ_0 die EULERSche Periode für eine völlig starre Erde (303,3 Tage), τ die Periode der wirklichen Polbewegung, α die Abplattung der Erde und β das Verhältnis der Zentrifugalbeschleunigung am Äquator zur Schwerebeschleunigung daselbst sind. Diese Beziehung liefert h , aus $h - q$ und h erhalten wir dann auch q .

Die ersten Untersuchungen dieses Problems wurden unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Erde homogen sei. In diesem Falle ist h durch die Elastizitätstheorie gegeben, und zwar ist für eine homogene Kugel mit der Dichte ρ , dem Radius a und der Righeit μ

$$\frac{1}{h} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q \mu}{g \rho a}\right) \dots \dots \dots (179)$$

Es ist demnach nicht möglich, in diesem Falle alle Bedingungen zu erfüllen. Bei den zeitlich folgenden Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß die Erde aus zwei homogenen Teilen bestünde, und schließlich ging SCHWEYDAR dazu über, seinen Rechnungen ein Gesetz zugrunde zu legen, nach dem die Righeit von der Oberfläche bis zum Erdzentrum zunimmt. Eine verbesserte Rechnung führte A. PREY durch, während L. M. HOSKINS das gleiche Problem auf anderem Wege behandelte. Da nach den Ergebnissen über die Righeit im Erdinnern auf Grund von Untersuchungen über Erdbebenwellen (S. 476) damit zu rechnen ist, daß die Righeit im Erdkern sehr klein oder Null ist, machte PREY einen weiteren Ansatz, nach dem die Righeit von einem gegebenen Wert an der Erdoberfläche erst zu und dann wieder auf Null im Erdzentrum abnimmt, nachdem schon vorher JEFFREYS das Problem untersucht hatte, ob eine geringe Righeit des Erdkernes überhaupt mit den oben angegebenen Beobachtungstatsachen vereinbar ist. Wir wollen im folgenden diese einzelnen Untersuchungen auszugsweise wiedergeben. (Literatur S. 478.)

§ 164. Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung nach SCHWEYDAR-PREY für eine inkompressible Erde. Wir setzen mit SCHWEYDAR und PREY, dessen Darstellung wir im wesentlichen folgen, voraus, daß die Erde eine vollkommen elastische Kugel ist, die aus gravitierender Masse besteht, daß sowohl die Dichte wie die Righeit nur von der Entfernung vom Erdmittelpunkt abhängt, und daß die Erde inkompressibel ist. Die Kompressibilität übt nach A. E. H. LOVE keinen wesentlichen Einfluß aus. An Hand von zwei Beispielen fand dieser, daß die berechnete Righeit der Erde in diesem Falle etwas zu klein ausfällt, daß die notwendige Korrektur jedoch klein ist gegenüber der Unsicherheit, die durch die unbekannten Eigenschaften der Massen im Erdinnern bedingt ist. Er berechnete (vgl. auch § 167 S. 492ff.).

	ohne		mit Berücksichtigung von k	
Fall 1	$h = 0,932$	$q = 0,513$	$h = 0,839$	$q = 0,503$
„ 2	$h = 1,044$	$q = 0,523$	$h = 0,855$	$q = 0,513$

Im ungestörten Zustande sei das Gravitationspotential V_0 , der Druck p_0 ; die Dichte ρ sei zunächst eine beliebige Funktion von r . Nach unseren Ergebnissen S. 470ff. sind wir berechtigt, den Druck hydrostatisch vorauszusetzen. Wir wollen weiter annehmen, daß dies auch für die Zusatzdrucke zutrifft. Im ungestörten Zustand ist dann

$$\rho \frac{\partial V_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad \rho \frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad \rho \frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z} \quad \dots \quad (180)$$

Ein Teilchen an der Stelle x, y, z erfährt die Verschiebungen u, v, w . Die Verschiebung in radialer Richtung sei U . Liegt der Koordinatenanfang im Erdmittelpunkt, so wird

$$Ur = ux + vy + wz \quad \dots \quad (181)$$

Die Dichteänderung wird $-U \frac{\partial \rho}{\partial r}$. Durch die äußeren Kräfte mit dem Potential W ändert sich das Potential V_0 um V . Das Potential aller Kräfte ist also

$$R = V_0 + V + W \quad \dots \quad (182)$$

Der Druck p_0 ändere sich um p . Bezeichnen wir noch den Righeitsmodul mit μ , so sind die Spannungskomponenten im Punkte x, y, z gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} - p_0 - p & T_1 &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ N_2 &= 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} - p_0 - p & T_2 &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ N_3 &= 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} - p_0 - p & T_3 &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (183)$$

Die Spannungsgleichungen sind von der Form

$$-\left(\rho - U \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \dots \quad (184)$$

Substituieren wir die Ausdrücke (182) und (183) in (184) und berücksichtigen, daß μ nur eine Funktion von r sein soll, daß also

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \dots \quad (185)$$

und daß als Folge der Inkompressibilität die Volumenänderung Null ist,

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \dots \quad (186)$$

so finden wir drei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} & -\left(\rho - U \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial (V + W)}{\partial x} \right) = \\ & -\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} \left[2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (187)$$

Nach (181) ergeben sich drei Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial (Ur)}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial w}{\partial x} + u \dots \quad (187a)$$

ferner gelten drei Gleichungen von der Form

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \dots \quad (187b)$$

Führt man diese Beziehungen in (187) ein und vernachlässigt Glieder höherer Ordnung in U und V , berücksichtigt ferner die Beziehungen (180), so ergibt sich

$$-\rho \frac{\partial (V + W)}{\partial x} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left[\frac{\partial (Ur)}{\partial x} - u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (188)$$

und zwei ähnliche für y und z .

Die Größen V_0 , V und W sind Gravitationspotentiale und genügen daher der LAPLACESchen bzw. POISSONSchen Gleichung. Für V_0 , das ungestörte Potential, gilt

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi f \rho \dots \quad (189)$$

wo f die Gravitationskonstante bedeutet. Für das gestörte Potential ist analog

$$\nabla^2 (V_0 + V) = -4\pi f \left(\rho - U \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \text{ also } \nabla^2 V = 4\pi f U \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (190)$$

Ferner ist in der Erde

$$\nabla^2 W = 0, \quad (191)$$

da die störenden Massen, welche W erzeugen, außerhalb der Erde liegen. Multipliziert man die drei Gleichungen von der Art (188) der Reihe nach mit $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$ und addiert, wobei man zur Abkürzung

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial r} = -F r^2 \quad (192)$$

setzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial (V + W)}{\partial r} - U F r^2 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} (x \nabla^2 u + y \nabla^2 v + z \nabla^2 w) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left[\frac{\partial (U r)}{\partial r} - \frac{1}{r} (u x + v y + w z) + x \frac{\partial u}{\partial r} + y \frac{\partial v}{\partial r} + z \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (193) \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (181)

$$x \frac{\partial u}{\partial r} + y \frac{\partial v}{\partial r} + z \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial (U r)}{\partial r} - U \quad (194)$$

ferner nach (181) und (186)

$$\nabla^2 (U r) = x \nabla^2 u + y \nabla^2 v + z \nabla^2 w \quad (195)$$

Berücksichtigt man noch (181), so geht (193) über in

$$-\rho \frac{\partial (V + W)}{\partial r} - U r^2 F = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \nabla^2 (U r) + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left[\frac{\partial (U r)}{\partial r} - \frac{1}{r} (U r) \right] \quad (196)$$

Differenziert man dagegen die drei Gleichungen des Systems (188) der Reihe nach nach x , y , z , addiert, und berücksichtigt, daß

$$U \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial x} = U \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{x}{r} \text{ usw.} \quad (197)$$

$$U \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial r} = -U F r^2 \quad (198)$$

ferner (181), (194) und (191), so bleibt schließlich

$$\begin{aligned} \rho \nabla^2 V + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial (V + W)}{\partial r} + 3 U F r + r \frac{\partial (U F r)}{\partial r} \\ = \nabla^2 p - \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \nabla^2 (U r) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial (U r)}{\partial r} - \frac{1}{r} (U r) \right] \quad (199) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (196) und (199) bildete nun SCHWEYDAR einen neuen Ausdruck nach der Vorschrift

$$\nabla^2 (r G) + r \frac{\partial H}{\partial r} + 2 H = \nabla^2 (r M) + r \frac{\partial N}{\partial r} + 2 N \quad (200)$$

wo G und H die linken Seiten, M und N die rechten Seiten der Gleichungen (196) bzw. (199) bedeuten. Die sehr umständliche Rechnung, die von PREY eingehend angegeben wurde, führt schließlich auf

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\nabla^2 V - \frac{\partial^2 (V+W)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial (V+W)}{\partial r} \right] - r^2 \left[\nabla^2 (U Fr) - \frac{\partial^2 (U Fr)}{\partial r^2} \right] \\ - \frac{2}{r} \frac{\partial (U Fr)}{\partial r} \left[\mu \nabla^2 (U r) \right] - \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \nabla^2 (U r) \\ + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \left[r \frac{\partial^2 (U r)}{\partial r^2} + \frac{\partial (U r)}{\partial r} - \frac{(U r)}{r} - r \nabla^2 (U r) \right] \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

eine Gleichung für U .

Wir stellen nunmehr W , $(U r)$ und V durch Kugelfunktionen dar

$$W = \sum w_n P_n \quad U r = \sum q_n P_n \quad V = \sum h_n P_n \quad \dots \quad (202)$$

Die P_n sind räumliche Kugelfunktionen und homogene Funktionen vom Grade n . In Polarkoordinaten haben sie den Faktor r^n , und es ist

$$\nabla^2 P_n = 0 \quad \dots \quad (203)$$

h_n und q_n sind Funktionen von r allein. Setzt man die Größen in (201) ein, so erhält man eine Beziehung von der Form

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \dots = 0 \quad \dots \quad (204)$$

und es müssen die Koeffizienten $A_1, A_2 \dots A_n \dots$ für sich verschwinden. Wir führen nun diese Bedingung für das Glied A_n durch, wobei folgende Beziehungen zu berücksichtigen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial r} &= \frac{n}{r} P_n & \frac{\partial^2 P_n}{\partial r^2} &= \left(-\frac{n}{r^2} + \frac{n^2}{r^2} \right) P_n = \frac{n(n-1)}{r^2} P_n \\ \frac{\partial (U r)}{\partial r} &= \frac{\partial (q_n P_n)}{\partial r} = \left(\frac{\partial q_n}{\partial r} + \frac{n q_n}{r} \right) P_n \\ \nabla^2 (U r) &= \left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial r^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{\partial q_n}{\partial r} \right) P_n \\ r_0^2 \nabla^2 (U r) &= \left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial a^2} + \frac{2(n+1)}{a} \frac{\partial q_n}{\partial a} \right) P_n \quad \dots \quad (205) \end{aligned}$$

wo r_0 = Erdradius, $r = a r_0$, also $a = \frac{r}{r_0}$.

Definieren wir noch eine Operation $D(x)$ durch

$$D(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{2(n+1)}{a} \frac{\partial x}{\partial a} \quad \dots \quad (206)$$

so ist

$$r_0^2 \nabla^2 (U r) = D(q_n) P_n \quad \dots \quad (207)$$

Schreiben wir noch

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial a} \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \quad \dots \quad (208)$$

so folgt nach längerer Rechnung (eingehend bei PREY) aus Gleichung (201) schließlich

$$\left. \begin{aligned} D[\mu D(q_n)] - 2 \frac{\mu'}{a} D(q_n) - 2 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\mu'}{a} \right) a^{n^2-1} \frac{\partial}{\partial a} (a^{1-n^2} q_n) \\ = -\varphi' \frac{n(n+1)}{a} r_0^2 (h_n + w_n) + n(n+1) r_0^4 F q_n \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

Ist $R > r$, so liefert die Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} V &= f \rho \int \int \int \sum \frac{r^{n+2}}{R^{n+1}} P_n (\cos \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda dr \\ &= f \rho \int \int \sum_n \frac{1}{n+3} \left[\frac{r^{n+3}}{R^{n+1}} \right]_0^{r+U} P_n (\cos \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \end{aligned}$$

Entwickeln wir nach der kleinen Größe U und vernachlässigen Glieder höherer Ordnung, so wird

$$V = f \rho \int \int \sum \frac{1}{(n+3) R^{n+1}} [r^{n+3} + (n+3) r^{n+2} U] P_n (\cos \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$$

Auf Grund der Integraleigenschaften von Kugelfunktionen und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das erste Glied in der eckigen Klammer einer Kugelfunktion nullter Ordnung entspricht, wird

$$V = \frac{4\pi f \rho r^3}{3 R} + \sum \frac{4\pi f \rho r^{2n+1}}{2n+1 R^{n+1}} q_n (r^{-n} P_n)$$

Berechnen wir nun das Potential einer Schicht, die zwischen zwei Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 eingeschlossen ist, und lassen wir $r_1 - r_2$ gegen 0 konvergieren, so wird

$$dV = \frac{4\pi f \rho}{3 R} dr^3 + \sum \frac{4\pi f \rho}{2n+1 R^{n+1}} d(r^{2n+1} q_n) (r^{-n} P_n) \quad (219)$$

Ganz analog finden wir das Potential einer unendlich dünnen Schicht, falls $R < r$

$$dV = \frac{4\pi f \rho}{2} dr^2 + \sum \frac{4\pi f \rho}{2n+1 R^n} dq_n (r^{-n} P_n) \quad (220)$$

Integrieren wir (219) von 0 bis R und (220) von R bis r_0 , so finden wir das Potential der deformierten Kugel in bezug auf einen Punkt im Innern:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi f}{3 R} \int_0^R \rho dr^3 + \frac{4\pi f}{2} \int_R^{r_0} \rho dr^2 + \sum \frac{4\pi f}{2n+1} (r^{-n} P_n) \left[R^{-n-1} \int_0^R \rho d(r^{2n+1} q_n) \right. \\ &\quad \left. + R^n \int_R^{r_0} \rho dq_n \right] \quad (221) \end{aligned}$$

Hierbei können wir nun R durch r ersetzen. Die ersten beiden Glieder stellen r_0 dar und müssen hier wegbleiben, da sie schon durch (214) berücksichtigt sind. Nach (202) ist

$$V = \sum h_n P_n = \sum h_n r^n (r^{-n} P_n) \quad (222)$$

Aus (221) und (222) ergibt sich

$$h_n = \frac{4\pi f}{2n+1} \left\{ \frac{1}{r^{2n+1}} \int_0^r \rho d(r^{2n+1} q_n) + \int_r^{r_0} \rho dq_n \right\} \quad (223)$$

Setzt man weiter für ρ den Ausdruck (212) und für q_n den Ausdruck (217a), so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$h_n = \frac{4\pi f \rho_0}{2n+1} A \sum \left[a_s \left(1 - \beta \frac{s}{s+1} - \beta a_{s-1} \frac{2n+1}{s(2s+2n+1)} a^{2s} \right) + \dots \right]$$

Wir können also h_n in der Form schreiben

$$h_n = A \sum c_s a^{2s} + A' \sum c'_s a^{2s} + A'' \sum c''_s a^{2s} \quad \dots \quad (224)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{4\pi f \rho_0}{2n+1} \sum_0^\infty a_s \left(1 - \beta \frac{s}{s+1}\right) & c_s &= -\frac{4\pi f \rho_0 \beta}{s(2s+2n+1)} a_{s-1} \\ c'_0 &= \frac{4\pi f \rho_0}{2n+1} \sum_0^\infty a'_s \left(1 - \beta \frac{s}{s+1}\right) & c'_s &= -\frac{4\pi f \rho_0 \beta}{s(2s+2n+1)} a'_{s-1} \\ c''_0 &= \frac{4\pi f \rho_0}{2n+1} \sum_0^\infty a''_s \left(1 - \beta \frac{s}{s+1}\right) & c''_s &= -\frac{4\pi f \rho_0 \beta}{s(2s+2n+1)} a''_{s-1} \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

Die Gleichung für den Druck ergibt sich ähnlich wie die für U aus (196) und (199), und zwar diesmal nach der Vorschrift (vgl. S. 482)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 G)}{\partial r} + H = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 M)}{\partial r} + N \quad \dots \quad (226)$$

Setzen wir nun

$$p = \sum p_n P_n \quad \dots \quad (227)$$

und berechnen die einzelnen Glieder, so erhalten wir für p_n folgende Beziehung

$$\begin{aligned} n(n+1) r_0^2 p_n &= n(n+1) r_0^2 \rho (h_n + w_n) + a^{-n} \frac{\partial [a^{n+1} n D(q_n)]}{\partial a} \\ &\quad - 2\mu' a^{n-1} \frac{\partial (a^{1-n^2} q_n)}{\partial a} \end{aligned}$$

Die hier auftretende Größe h_n eliminieren wir mit Hilfe von (224). Es ergibt sich analog wie S. 485 für q_n :

$$p_n = A \sum b_s a^{2s} + A' \sum b'_s a^{2s} + A'' \sum b''_s a^{2s} + \rho_0 (1 - \beta a^2) w_n \quad (228)$$

wo b_s (und analog b'_s und b''_s) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} b_s &= \rho_0 (c_s - \beta c_{s-1}) + \frac{\mu_0}{r_0^2 n(n+1)} [(2s+2)(2s+n+3)(2s+n+1)] \alpha_{s+1} \\ &\quad + 2\gamma [2(2s+1-n^2) - s(2s+2n+1)(2s+n+1)] \alpha_s \quad \dots \quad (229) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten A , A' und A'' müssen durch die Grenzbedingungen bestimmt werden. Diese lauten, da an der Erdoberfläche keine Spannungen auftreten dürfen,

$$\left. \begin{aligned} (Xr)_{r=r_0} &= N_1 \cos(x, r) + T_3 \cos(y, r) + T_2 \cos(z, r) = 0 \\ (Yr)_{r=r_0} &= T_3 \cos(x, r) + N_2 \cos(y, r) + T_1 \cos(z, r) = 0 \\ (Zr)_{r=r_0} &= T_2 \cos(x, r) + T_1 \cos(y, r) + N_3 \cos(z, r) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

Aus (183) findet man unter Benutzung von (187a) und (187b)

$$\left. \begin{aligned} X_r &= -\frac{x}{r} (p_0 + p) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial (Ur)}{\partial x} - u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ Y_r &= -\frac{y}{r} (p_0 + p) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial (Ur)}{\partial y} - v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ Z_r &= -\frac{z}{r} (p_0 + p) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial (Ur)}{\partial z} - w + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (231)$$

Setzt man wieder wie seither

$$V = \sum h_n P_n \quad W = \sum w_n P_n \quad p = \sum p_n P_n \quad (Ur) = \sum q_n P_n$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial V_0}{\partial r} = -Fr^2, \quad \text{ferner} \quad u = \sum u_n x P_n + \sum u'_n \frac{\partial P_n}{\partial x},$$

wo u_n und u'_n nur noch Funktionen von r sind, in (188) ein, so findet man nach einigen Umformungen

$$x P_n \left\{ \mu \frac{\partial^2 u_n}{\partial a^2} + \left[\frac{2\mu(u+2)}{a} + \frac{\partial \mu}{\partial a} \right] \frac{\partial u_n}{\partial a} + \frac{1}{a} \frac{\partial \mu}{\partial a} n u_n + \frac{\varphi}{a} \frac{\partial h_n}{\partial a} \right. \\ \left. + q_n Fr_0^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial p_n}{\partial a} + \frac{1}{r_0^2 a^2} \frac{\partial \mu}{\partial a} \frac{\partial q_n}{\partial a} \right\} + \frac{\partial P_n}{\partial x} \left\{ \mu \frac{\partial^2 u'_n}{\partial a^2} + \left(\frac{2\mu n}{a} + \frac{\partial \mu}{\partial a} \right) \frac{\partial u'_n}{\partial a} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial a} (n-2) u'_n + \varphi r_0^2 (h_n + w_n) - p_n r_0^2 + 2\mu r_0^2 u_n + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial a} q_n \right\} = 0 \quad (232)$$

Jede der beiden Klammern $\{ \}$ muß verschwinden; die erste liefert u_n , die zweite dann u'_n . v und w sind, wie die Rechnung zeigt, durch die gleichen Beziehungen bestimmt. Daher wird

$$u_n = v_n = w_n \quad u'_n = v'_n = w'_n \quad \dots \quad (233)$$

und

$$\left. \begin{aligned} u &= u_n x P_n + u'_n \frac{\partial P_n}{\partial x} \\ v &= u_n y P_n + u'_n \frac{\partial P_n}{\partial y} \\ w &= u_n z P_n + u'_n \frac{\partial P_n}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \quad (234)$$

Nach (181) und (186) ist außerdem

$$ux + vy + wz = Ur$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{Inkompressibilität}).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (234) ein, so findet man

$$\sum u_n r^2 P_n + u'_n n P_n = Ur \quad \text{oder} \quad u_n r^2 + u'_n n = q_n \quad (235)$$

ferner, indem man $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ bildet und addiert:

$$a \frac{\partial u_n}{\partial a} + \frac{n}{r_0^2 a} \frac{\partial u'_n}{\partial a} + (3+n) u_n = 0 \quad \dots \quad (236)$$

Differenziert man (235) nach a und kombiniert dann mit (236), so ergibt sich

$$u_n = - \frac{1}{r_0^2 a (n+1)} \frac{\partial q_n}{\partial a} \quad \dots \quad (237)$$

$$u'_n = \frac{q_n}{n} + \frac{a}{n(n+1)} \frac{\partial q_n}{\partial a} \quad \dots \quad (238)$$

Diese beiden Ausdrücke müssen nun auch (232) genügen. Durch Einsetzen findet man, daß alle Klammerausdrücke verschwinden bis auf den Fall $s=0$. In diesem Fall ergibt sich folgende Beziehung zwischen A, A' und A'' :

$$\left. \begin{aligned} & -2\varphi_0\beta c_0 A - 2\varphi_0\beta c_0' A' - A'' [2\varphi_0\beta c_0''] \\ & - \frac{\mu_0}{r_0^2 n(n+1)} [8(2n+5)(2n+3)] = 2\varphi_0\beta w_n \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (239)$$

Wir können nunmehr die Spannungen X_r , Y_r , Z_r nach (231) berechnen. Sie müssen an der Oberfläche verschwinden, d. h. die Ausdrücke (231) müssen für $r = r_0 + U$ den Wert Null haben. An der Oberfläche ist

$$(p_0)_{r_0+U} = -[U \varphi g]_{a=1} = -\left[\varphi \frac{Ur}{r} g\right]_{a=1} = -\left[\frac{\varphi g}{r} q_n P_n\right]_{a=1} \quad (240)$$

$$\frac{\partial(Ur)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum (k_n P_n) = \sum \left(\frac{\partial q_n x}{\partial x a} + q_n \frac{\partial P_n}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum \left(\frac{\partial u_n}{\partial r} x P_n + u_n \frac{(n+1)}{r} x P_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(u'_n)}{\partial r} \frac{\partial P_n}{\partial x} + u'_n \frac{n-1}{r} \frac{\partial P_n}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Die Gleichung $[X_r]_{a=1} = 0$ lautet hiernach

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\sum \left\{ \frac{\varphi g}{a^2 r_0^2} q_n - \frac{p_n}{a r_0} + \frac{n}{a r_0} \left(\frac{1}{r_0^2 a} \frac{\partial q_n}{\partial a} + a \frac{\partial u_n}{\partial a} + n u_n \right) \right\} x P_n \right]_{a=1} \\ & + \left[\sum \left\{ q_n + a \frac{\partial u'_n}{\partial a} + (n-2) u'_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial x} \right]_{a=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Jeder der Klammerausdrücke $[\]$ muß für sich verschwinden. Setzen wir für u_n und u'_n die Werte aus (237) und (238), für q_n und p_n die Reihen (217a) und (228) ein und setzen $a = 1$, so ergeben sich hieraus (und ebenso aus den Bedingungen $[y_r]_{a=1} = 0$, $[z_r]_{a=1} = 0$) folgende zwei Gleichungen für A , A' und A'' , aus denen sich zusammen mit (239) diese Integrationskonstanten berechnen lassen (φ und g bedeuten die Werte an der Oberfläche):

$$\left. \begin{aligned} & A \left[\frac{\varphi g}{r_0} \sum \alpha_s - \sum b_s - \frac{\mu_0(1-\gamma)}{r_0^2(n+1)} \sum 2s(2s-3) a_s \right] \\ & + A' \left[\frac{\varphi g}{r_0} \sum \alpha'_s - \sum b'_s - \frac{\mu_0(1-\gamma)}{r_0^2(n+1)} \sum 2s(2s-3) a'_s \right] \\ & + A'' \left[\frac{\varphi g}{r_0} \sum \alpha''_s - \sum b''_s - \frac{\mu_0(1-\gamma)}{r_0^2(n+1)} \sum 2s(2s-3) a''_s \right] = \varphi_0(1-\beta) w_n \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

$$\begin{aligned} & A \sum [2(n^2-1) + 2s(2s+2n-1)] a_s + A' \sum [2(n^2-1) + 2s(2s+2n-1)] a'_s \\ & + A'' \sum [2(n^2-1) + 2s(2s+2n-1)] a''_s = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (243) \end{aligned}$$

Das Problem ist hiermit unter den angegebenen Voraussetzungen gelöst.

§ 166. Zahlenwerte für die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen. Die Gleichungssysteme (239), (242) und (243) können auf zweierlei Art verwandt werden: Entweder man benutzt die bekannten Werte von h und q , um die Werte μ_0 und γ zu berechnen, oder man macht Annahmen über die beiden letzteren und sucht die zugehörigen Werte von h und q . Den ersten Weg ging SCHWEYDAR, den zweiten PREY, dem wir wieder folgen, da seine Ergebnisse gleichzeitig einen Einblick in den Zusammenhang der verschiedenen Größen gestatten. Er benutzte folgende Zahlenwerte:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm} \\
 f &= 6,6 \cdot 10^{-8} \\
 \varphi_0 &= 10,1 \\
 \beta &= 0,764 \\
 \bar{\varphi} &= 2,384 \\
 n &= 2 \\
 g &= 980,6 \text{ cm/sec}^2 \\
 l &= 81,45 \\
 m_{\text{Mond}} & \\
 c_{\text{Mond}} &= 3,844 \cdot 10^{10} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Die Werte für φ_0 , β und $\bar{\varphi}$ sind durch das als gültig vorausgesetzte Gesetz von ROCHE gegeben.

Die Rechnung beginnt mit der Rekursionsformel (218), dann werden c_0 , c_0' , c_0'' , c_s , c_s' und c_s'' nach (225) und die b_s nach (229) berechnet. Die Auflösung der drei Gleichungen (239), (242) und (243) führt dann zu den Werten A , A' und A'' , aus (217a) in Verbindung mit der Beziehung für die Erdoberfläche (überstrichene Symbole)

$$\bar{q}_2 = \frac{r_0 w_2}{g} q$$

ergibt sich dann q , aus (223) und $\bar{h}_2 = w_2 h$ der Wert von h , aus (177) dann γ , beide als Funktion von μ_0 und η . Hat man eine Reihe von Werten h und γ berechnet, die zu bestimmten Kombinationen μ , η gehören, so kann man unter Interpolation Kurven bestimmter Werte von γ und h als Funktion der angenommenen μ , η zeichnen. PREY führte dieses Verfahren für 26 Kombinationen durch, und erhielt die in Fig. 161 dargestellten Kurven. Er fand dabei das überraschende Ergebnis, daß die beiden Kurvenscharen für h und γ fast parallel laufen, so daß in der Praxis zu einem gegebenen h nur ein enger Bereich von γ möglich ist.

Einen weiteren Anhalt für die Richtigkeit gibt uns nun die Feststellung der Werte an der Erdoberfläche, und zwar einmal durch das Experiment (Tabelle 50a S. 474), dann durch die Untersuchung der Erdbebenwellen (S. 476). Man kann also eine weitere Kurvenschar einzeichnen, die gegeben ist durch $\mu = \mu_0 (1 - \eta)$, wo μ der für die Erdoberfläche bestimmte Wert ist. Man muß nun in Fig. 161 das Wertepaar μ , η suchen, das am besten den drei beobachteten Werten γ , h und $\bar{\mu}$ entspricht, also den Schnittpunkten der drei entsprechenden Kurven am nächsten liegt.

Der Wert von h muß aus der Periode der Polschwankung bestimmt werden (vgl. S. 479). Die Abplattung der Erde ist mit hinreichender Sicherheit zu 1 : 297 bis 1 : 298 bekannt. Auch das Verhältnis der Fliehbeschleunigung zur Schwerebeschleunigung am Äquator ist mit 1 : 288 hinreichend sicher, ebenso die EULERsche Periode mit 306 Tagen. Wir finden hiernach aus (178)

$$h = 0,93 - \frac{285}{\tau} \quad \dots \dots \dots (244)$$

wo τ die tatsächliche Periode der Polbewegung ist. Der Wert von τ wurde in den letzten Jahren etwas verschieden gefunden (vgl. Band I) und zwar etwa zwischen 410 und 440. Die Feststellung ist dadurch etwas erschwert, daß die Bewegungen durch eine solche mit jährlicher Periode überlagert sind, außerdem zeigte eine eingehende Periodogramm-Untersuchung von POLLAK¹⁾, daß im

¹⁾ Gerlands Beiträge zur Geophysik, 16, 108, 1927.

Jahre 1900 eine Inhomogenität des Beobachtungsmaterials vorliegt. Er fand $\tau = 1,2$ Jahre; eine genauere Feststellung war nicht möglich. — Hiernach wäre $\tau = 438$ Tage (Mittel 1890—1924). Aus diesen Angaben ersehen wir, daß h zwischen 0,24 und 0,29 liegen dürfte, und daß $h = 0,28$ wohl am wahrscheinlichsten ist.

Vermutlich wird der Wert von h etwas durch den Ozean beeinflusst, und zwar wäre nach LARMOR¹⁾ etwa 0,02 von dem gefundenen Wert zu subtrahieren,

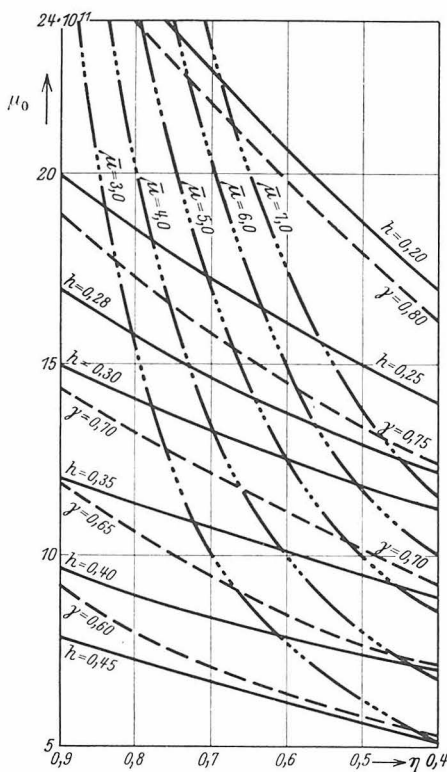


Fig. 161
Zusammengehörige
Werte von μ (Rig-
heit an der Erd-
oberfläche in
 $egs \cdot 10^{-11}$), h und γ
(vgl. S. 478)
als Funktion der
Righeit μ_0 im Erd-
zentrum und des
Koeffizienten η in
Gleichung 212.
Nach den Ergeb-
nissen von A. PREY

so daß wir als wahrscheinlichsten korrigierten Wert $h = 0,26$ erhalten mit einer geschätzten Unsicherheit von $\pm 0,02$.

Betrachten wir nunmehr die Untersuchungen zur Feststellung von q . Eine direkte Bestimmung von q ist nicht möglich, wir erhalten immer

$$\gamma = 1 + h - q$$

In Tabelle 52 ist eine Reihe von Bestimmungen von γ zusammengestellt. Man erkennt, daß die Feststellung von q viel unsicherer ist als die von h , zumal ja der Fehler von h mit in das Ergebnis eingeht. Man würde etwa annehmen können, daß γ zwischen 0,6 und 0,85 liegt, wahrscheinlich näher an der oberen als an der unteren Grenze. Dann wäre q für $h = 0,26$ zwischen 0,66 und 0,4. Wir sehen anderseits aus Fig. 161, daß einem Werte $h = 0,26$ ein Wert $\gamma = 0,76$ unter unseren Annahmen entsprechen muß. Daß die Übereinstimmung mit den direkt gefundenen Werten so gut ist, spricht dafür, daß eine ähnliche Beziehung zwischen

¹⁾ Proc. London, Math. Soc., 14, 440, 1915.

q und h , wie wir sie fanden, auch bei dem wirklich vorhandenen Gesetz für die Dichte und die Righeit im Erdinnern besteht. Als wahrscheinlichsten Wert für q finden wir somit 0,5, d. h. h ist ziemlich genau $\frac{1}{4}$ und q nahe $\frac{1}{2}$.

Tabelle 52
Neuere Ergebnisse von Untersuchungen zur Bestimmung
von $\gamma = 1 + h - q$

Methode	Ort	Autor	Jahr	γ
14tägige Meeresflut	194 Stationen	SCHWEYDAR	1909	0,66
Monatliche Meeresflut . . .	—	„	1909	0,64
Gezeiten des Erdkörpers {	Potsdam	HECKER	1902—1905	0,58 0,53 ¹⁾
(Pendel) {	„	„	1905—1907	0,58 0,49
dasselbe	„	„	1907—1909	0,57 0,44
dasselbe	Dorpat	ORLOFF	1909	0,67 0,59
dasselbe Tide K_1	Freiberg	SCHWEYDAR	1913	0,77
dasselbe Tide P	„	„	1913	0,82
dasselbe Tide M_2	„	„	1913	0,62
dasselbe Tide O	„	„	1913	0,84
dasselbe bester Wert .	„	„	1913	0,84
dasselbe Wasserniveau in Röhren . .	{ Williams Bay (Wisconsin)	MICHELSON, GALE	1919	0,69

Um das beste Wertepaar n_0 und γ zu finden, müssen wir nunmehr noch die beobachteten Werte für den Righeitskoeffizienten an der Erdoberfläche hinzunehmen. In Fig. 161 sind zu diesem Zwecke noch die Kurven μ_0, γ eingetragen, welche Werten von $\mu = 3 \cdot 10^{11}$ bis $7 \cdot 10^{11}$ entsprechen. In der Erdkruste (vgl. Tab. 51 S. 477) scheint der Wert von μ ziemlich schnell von etwa $3 \cdot 10^{11}$ auf über $6 \cdot 10^{11}$ in 50 km Tiefe anzusteigen. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache müssen wir für unsere Untersuchung $\mu = \text{etwa } 6 \cdot 10^{11}$ annehmen. Der Punkt, der am besten den wahrscheinlichsten Kurven für h, γ und μ entspricht, hat etwa die Koordinaten (vgl. Fig. 161) $\mu_0 = 15 \cdot 10^{11}, \gamma = 0,6$. Wir erhalten also unter unseren Voraussetzungen über die Dichte im Erdinnern und parabolischer Zunahme der Righeit als wahrscheinlichstes Gesetz $\mu = 15 \cdot 10^{11} \left(1 - 0,6 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$. Die entsprechende Kurve für μ ist in Fig. 160 S. 477 eingetragen.

§ 167. Untersuchungen von Hoskins über die Righeit im Erdinnern²⁾. L. M. Hoskins ging von den allgemeinen Beziehungen aus, die für einen völlig elastischen Körper gelten. Dabei setzte er noch voraus, daß für die Spannungsänderungen bei einer bestimmten Verschiebung die gleichen Gesetze gelten wie für die Spannungen selbst. Wir benutzen die gleichen Symbole wie seither:

Rechtwinklige Koordinaten	x	y	z
Verschiebungskomponenten	u	v	w
Normalspannungen	N_1	N_2	N_3

¹⁾ Bei Angabe von zwei Werten beziehen sich diese auf zwei verschiedene Richtungen. Der Unterschied wird durch die Meeresgezeiten bewirkt. (Vgl. Band 1.)
²⁾ Transact. of the Amer. Mathemat. Soc. 21, 1, 1920.

Tangentialspannungen	T_1	T_2	T_3
Komponenten der äußeren Kräfte . .	X	Y	Z
Dichte	ρ		
Righeitsmodul	μ		
Inkompressibilitätsfaktor	k		
LAMÉsche Konstante	λ		
Volumenänderung	Θ		
Zeit	t		

Wir haben dann folgende Beziehungen (vgl. S. 145ff.)

$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho X + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}$ und zwei weitere für v und w (245)

$N_1 = \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ und zwei analoge für N_2 und N_3 (246)

$T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ und zwei analoge für T_2 und T_3 (247)

Der Körper sei nun unter irgendwelchen Kräften im Gleichgewicht. Zu den vorhandenen Spannungen mögen nun weitere Spannungskomponenten $\delta N_1, \delta N_2, \delta N_3, \delta T_1 \dots$ hinzukommen. Die entsprechenden Änderungen der Verschiebungen, also die Verschiebungen gegenüber dem seitherigen Zustand, seien u, v, w ; dann ist nach der Voraussetzung von HOSKINS (s. oben)

$\delta N_1 = \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ usw. (248)

$\delta T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ usw. (249)

Durch Differentiation und Addition der Gleichungen für $\delta N_i, \delta T_2$ und δT_3 ergibt sich

$$\frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta T_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta T_3}{\partial z} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \Theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (250)$$

und zwei analoge Beziehungen. Sind nun N_1', T_1' usw. die Spannungskomponenten, wenn die Zusatzverschiebung vorhanden ist, so ist z. B.

$\delta N_1 = N_1' - N_1 + u \frac{\partial N_1}{\partial x} + v \frac{\partial N_1}{\partial y} + w \frac{\partial N_1}{\partial z} \dots \dots (251)$

Setzt man diese Beziehungen in (250) ein, berücksichtigt (245) und setzt weiter voraus, daß hydrostatischer Druck herrscht ($N_1 = N_2 = N_3 = N, T_1 = T_2 = T_3 = 0$), so findet man, falls X' analoge Bedeutung hat wie N'

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + X - X' + \Theta X \right) + X \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u X + \rho v Y + \rho w Z) \dots \dots \dots (252)$$

als linke Seite der Gleichung (250). Ist der Körper eine rotierende Kugel mit dem Potential $V(r)$ vor der Verschiebung, so wird

$$X = \frac{x}{r} \frac{dV}{dr} \quad Y = \frac{y}{r} \frac{dV}{dr} \quad Z = \frac{z}{r} \frac{dV}{dr} \quad \dots \quad (253)$$

oder, falls U die radiale Verschiebung ist,

$$uX + vY + wZ = U \frac{dV}{dr} \quad \dots \quad (254)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varrho uX + \varrho vY + \varrho wZ) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varrho U \frac{dV}{dr} \right) = \varrho \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{dV}{dr} \right) + U \frac{d\varrho}{dr} \frac{dV}{dr} \quad \dots \quad (255)$$

$$X \left(u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + w \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) = U \frac{x}{r} \frac{d\varrho}{dr} \frac{dV}{dr} \quad \dots \quad (256)$$

Sei V' das Zusatzpotential während der Verschiebung, so lautet der Ausdruck

$$(252) \quad \varrho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Theta \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) \right] \quad \dots \quad (257)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (250) für die linke Seite ein, und setzt E_x für die Glieder, welche Ableitungen von λ und μ enthalten, so ergeben sich drei Gleichungen von der Form

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + E_x = \varrho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Theta \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) \right] \quad (258)$$

Diese Gleichungen sind die gleichen wie im Falle, daß Kräfte mit den Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) - \Theta \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

auf den völlig kräftefreien Körper wirken.

HOSKINS geht nunmehr zu Polarkoordinaten r, Λ, Φ über. Führt man ganz analoge Bezeichnungen ein, wie seither, sind ferner $\omega_r, \omega_\Lambda, \omega_\Phi$ die Scherungskomponenten der Verschiebung, so erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r \sin \Lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} (\omega_\Phi \sin \Lambda) - \frac{\partial \omega_\Lambda}{\partial \Phi} \right] + E_r \\ = \varrho \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial r} \Theta - \frac{\partial}{\partial r} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) \right] \quad \dots \quad (259) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} - \frac{2\mu}{r \sin \Lambda} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial (r \omega_\Phi \sin \Lambda)}{\partial r} \right] + E_\Lambda \\ = \varrho \left[\frac{\partial^2 u_\Lambda}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) \right] \quad \dots \quad (260) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{r \sin \Lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} - \frac{2\mu}{r} \left[\frac{\partial (r \omega_\Lambda)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \Lambda} \right] + E_\Phi \\ = \varrho \left[\frac{\partial^2 u_\Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(V' - V + U \frac{dV}{dr} \right) \right] \quad \dots \quad (261) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r = \Theta \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \frac{\partial u_\Lambda}{\partial r} - \frac{u_\Lambda}{r} \right) \\ + \frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial \mu}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial U}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} - \frac{u_\Phi}{r} \right) \quad \dots \quad (262) \end{aligned}$$

$$E_{\Lambda} = \frac{\Theta}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Lambda} + \frac{\partial u_{\Lambda}}{\partial r} - \frac{u_{\Lambda}}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \left(U + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\Lambda}}{\partial \Lambda} \right) \\ + \frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial \mu}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial u_{\Lambda}}{\partial \Phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial \Lambda} - \frac{u_{\Phi}}{r} \cot \Lambda \right) \quad . \quad . \quad (263)$$

$$E_{\Phi} = \frac{\Theta}{r \sin \Lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial U}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial r} - \frac{u_{\Phi}}{r} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda} \left(\frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial \Phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial \Lambda} - \frac{u_{\Phi}}{r} \cot \Lambda \right) \\ + \frac{2}{r \sin \Lambda} \frac{\partial \mu}{\partial \Phi} \left(U + \frac{u_{\Phi}}{r} \cot \Lambda + \frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial \Phi} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

An der Erdoberfläche müssen die Zusatzspannungen senkrecht zum Radiusvektor verschwinden. Wir erhalten hiernach folgende Grenzbedingungen

$$\delta_{rr} = \Theta \lambda + 2 \mu \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} . \quad . \quad (265) \end{array} \right.$$

$$\delta_{r\Lambda} = \mu \left(\frac{\partial u_{\Lambda}}{\partial r} - \frac{u_{\Lambda}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } r = r_0 \end{array} \right. \quad . \quad . \quad (266)$$

$$\delta_{r\Phi} = \mu \left(\frac{\partial u_{\Phi}}{\partial r} - \frac{u_{\Phi}}{r} + \frac{1}{r \sin \Lambda} \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} . \quad . \quad (267) \end{array} \right.$$

HOSKINS setzt nun voraus, daß das störende Potential proportional $S_i r^i$ ist, wo S_i eine Flächenkugelfunktion von der Ordnung i und eine einfache Kugelfunktion der Zeit ist. Sei weiter (unter Weglassung des Index i bei S)

$$U = u S \quad u_{\Lambda} = v \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \quad u_{\Phi} = \frac{v}{\sin \Lambda} \frac{\partial S}{\partial \Phi} \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

wo u, v, w nur von r abhängen; setzt man diese Werte in die Gleichungen für $\Theta, \omega_r, \omega_{\Lambda}$ und ω_{Φ} ein, setzt ferner

$$y = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} - i(i+1) \frac{v}{r} \quad z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv)}{\partial r} - u \right) \quad . \quad . \quad (269)$$

so wird

$$\Theta = y S \quad 2 \omega_r = 0 \quad 2 \omega_{\Lambda} = - \frac{z}{\sin \Lambda} \frac{\partial S}{\partial \Phi} \quad 2 \omega_{\Phi} = z \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \quad (270)$$

$$E_r = \left(\frac{d\lambda}{dr} y + 2 \frac{d\mu}{dr} \frac{du}{dr} \right) S \quad E_{\Lambda} = \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{u}{r} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \\ E_{\Phi} = \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{u}{r} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \frac{1}{\sin \Lambda} \frac{\partial S}{\partial \Phi} \quad . \quad . \quad . \quad (271)$$

Wir setzen weiter

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = - p^2 S \quad . \quad . \quad . \quad (272)$$

wo p eine Konstante ist. Dann wird

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - p^2 u S \quad \frac{\partial^2 u_{\Lambda}}{\partial t^2} = - p^2 v \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \quad \frac{\partial^2 u_{\Phi}}{\partial t^2} = - \frac{p^2 v}{\sin \Lambda} \frac{\partial S}{\partial \Phi} \quad (273)$$

Das Potential der störenden Kräfte sei gegeben durch (c = Konstante)

$$W = \frac{c g}{2 r_0^{i-1}} r^i S \quad . \quad . \quad . \quad (274)$$

Ferner ist

$$V = \frac{3g}{\varphi_m r_0} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \varphi r^2 dr + \int_r^{r_0} \varphi r dr \right] \quad (275)$$

Sei ferner T die Änderung des Potentials der Schwere durch die Verschiebungen, so wird

$$V' - V = W + T$$

Für T gilt nach HOSKINS folgende Beziehung:

$$T = - \frac{3gS}{(2i+1)\varphi_m r_0} \left[\frac{1}{r^{i+1}} \int_0^r \varphi \left(y r^{i+2} + \frac{d(ur^{i+2})}{dr} \right) dr \right. \\ \left. + r^i \int_r^{r_0} \varphi \left(\frac{y}{r^{i+1}} - \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r^{i+1}} \right) \right) dr \right] \quad (276)$$

Aus (268), (270) und (275) folgt

$$U \frac{dV}{dr} = - \frac{3guS}{\varphi_m r_0 r^2} \int_0^r \varphi r^2 dr \quad \Theta \frac{dV}{dr} = - \frac{3gyS}{\varphi_m r_0 r^2} \int_0^r \varphi r^2 dr \quad (277)$$

Nach Einsetzung aller Werte in (259), (260) und (261) ergeben sich nach Umformungen drei Gleichungen, die unabhängig von Λ , Φ und t sind, und deren beiden letzte identisch (279) sind:

$$(\lambda + 2\mu) r \frac{dy}{dr} + i(i+1) \mu z + r \frac{d\lambda}{dr} y + 2r \frac{d\mu}{dr} \frac{du}{dr} \\ = \frac{g\varphi a}{\varphi_m} \left(r \frac{dR}{dr} - \frac{3y}{r r_0^2} \int_0^r \varphi r^2 dr \right) - \varphi p^2 r u \quad (278)$$

$$(\lambda + 2\mu) y + \mu \frac{d(rz)}{dr} + r \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{u}{r} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = \frac{g\varphi r_0}{\varphi_m} R - \varphi p^2 r v \quad (279)$$

wo

$$R = \frac{\varphi_m}{gr_0 S'} \left(V - V' - U \frac{dV}{dr} \right) = \frac{3}{(2i+1)r_0^2} \left[\frac{1}{r^{i+1}} \int_0^r \varphi \left(y r^{i+2} - \frac{d(ur^{i+2})}{dr} \right) dr \right. \\ \left. + r^i \int_r^{r_0} \varphi \left(\frac{y}{r^{i+1}} - \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r^{i+1}} \right) \right) dr \right] + \frac{3u}{r^2 r_0^2} \int_0^r \varphi r^2 dr - \frac{c\varphi_m}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^i \quad (280)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\left[\lambda y + 2\mu \frac{du}{dr} \right]_{r=r_0} = 0 \quad \left[\mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} + \frac{u}{r} \right) \right]_{r=r_0} = 0 \quad (281)$$

HOSKINS geht nun schrittweise vor, und zwar macht er erst folgende Annahme:

$$\varphi = \varphi_0 (1 + k_1 a + k_2 a^2 + \dots), \quad \text{wo} \quad a = \frac{r}{r_0} \quad (282)$$

λ , μ , k_1 , $k_2 \dots$ sind Konstanten. Sei ferner

$$e = \frac{u}{r} \quad \alpha = \frac{v}{r} \quad p^2 r_0 = n g, \quad (283)$$

so lauten die Gleichungen (278), (279) und (280) jetzt

$$(\lambda + 2\mu) a \frac{dy}{da} + i(i+1)\mu z = \frac{g \varphi r_0}{\varphi_m} \left(a \frac{dR}{da} - 3 \frac{y}{a} \int_0^a \varphi a^2 da - n \varphi_m c a^2 \right) \quad (284)$$

$$(\lambda + 2\mu) y + \mu \frac{\partial (e a z)}{\partial a} = \frac{g \varphi r_0}{\varphi_m} (R - n \varphi_m \alpha a^2) \quad \dots \quad (285)$$

$$R = \frac{3}{2i+1} \left[\frac{1}{a^{i+1}} \int_0^a \varphi \left(y a^{i+2} - \frac{d(e a^{i+3})}{da} \right) da + a^i \int_a^i \varphi \left(\frac{y}{a^{i-1}} - \frac{d}{da} \left(\frac{e}{a^{i-2}} \right) \right) da \right] \\ + \frac{3e}{a} \int_0^a \varphi a^2 da - \frac{c \varphi_m}{2} a^i \quad \dots \quad (286)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\left[\lambda y + 2\mu \frac{d(e a)}{da} \right]_{a=1} = 0 \quad \left[\mu \left(a \frac{d\alpha}{da} + e \right) \right]_{a=1} = 0 \quad \dots \quad (287)$$

HOSKINS entwickelt nun in Reihen und setzt

$$y = \sum_{m=i}^{\infty} C_m a^m \quad z = \sum_{m=i}^{\infty} D_m a^m \quad e = \sum_{m=i-2}^{\infty} A_m a^m \quad \alpha = \sum_{m=i-2}^{\infty} B_m a^m \quad (288)$$

Auf Grund von (269) ist

$$\left. \begin{aligned} C_m &= (m+3) A_m - i(i+1) B_m \\ D_m &= -A_m + (m+2) B_m \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (289)$$

Da y und z keine Glieder $i-1$ oder $i-2$ enthalten, ist zur Erfüllung von (289)

$$A_{i-2} = i B_{i-2} \quad A_{i-1} = B_{i-1} = 0 \quad \dots \quad (290)$$

sonst

$$A_m = \frac{(m+2) C_m + i(i+1) D_m}{(m+2)(m+3) - i(i+1)} \quad B_m = \frac{C_m + (m+3) D_m}{(m+2)(m+3) - i(i+1)} \quad (291)$$

Sei nun

$$k' = \frac{\varphi_0}{\varphi_m} \quad b = \frac{g \varphi_m r_0}{\mu} \quad \dots \quad (292)$$

so wird

$$R = \varphi_0 \sum_{m=i}^{\infty} \mathfrak{L}_m a^m \quad \dots \quad (293)$$

wo sich \mathfrak{L} durch (von HOSKINS angegebene) Reihen darstellen läßt, während (284) und (285) übergehen in

$$\Sigma \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) m C_m + i(i+1) D_m \right] a^m = b k'^2 (1 + k_1 a + k_2 a^2 + \dots) \\ \left[\Sigma m \mathfrak{L}_m a^m - 3 \Sigma C_m \left(\frac{1}{3} a^{m+2} + \frac{1}{4} k_1 a^{m+3} + \dots \right) - \frac{n}{k'} \Sigma A_m a^{m+2} \right] \quad (294)$$

$$\Sigma \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) C_m + (m+1) D_m \right] a^m = b k'^2 (1 + k_1 a + \dots) \\ \left[\Sigma \mathfrak{L}_m a^m - \frac{n}{k'} \Sigma B_m a^{m+2} \right] \quad \dots \quad (295)$$

Hieraus folgen gewisse Beziehungen für $m = i, i+1, i+2 \dots$, aus denen sich die Größen A, B, C, D berechnen lassen. Die Untersuchungen gelten nicht,

falls in der ganzen Erde $\lambda = \infty$ oder $\mu = 0$. Diese Fälle werden von Hoskins gesondert untersucht. Wir gehen nunmehr zu dem allgemeineren Fall über.

Seien

$$\lambda = \lambda_0 (1 + s_1 a + s_2 a^2 + \dots) \quad \mu = \mu_0 (1 + t_1 a + t_2 a^2 + \dots) \quad (296)$$

so müssen zunächst in (284) und (285) die Glieder

$$a y \frac{\partial \lambda}{\partial a} + 2 a \frac{d(ea)}{da} \frac{d\mu}{da} \quad \text{bzw.} \quad a \left(e + a \frac{d\alpha}{da} \right) \frac{d\mu}{da} \dots \quad (297)$$

zugefügt werden, ebenso entsprechende Glieder in den folgenden Beziehungen. Die Definitionsgleichung (292) für b lautet nun

$$b = \frac{g \varphi_m r_0}{\mu_0}$$

Die zweiten Glieder von (294) und (295) bleiben ungeändert: die ersten werden wesentlich umfangreicher.

Da $\partial \lambda : \partial a$ und $\partial \mu : \partial a$ im Erdzentrum zweifellos 0 sind — wir müssen dies voraussetzen, damit Stetigkeit beim Durchgang durch das Erdzentrum gewahrt bleibt —, ist $s_1 = t_1 = 0$. Es ergeben sich nunmehr folgende Grundgleichungen für die Größen A , B , C und D analog wie dies im speziellen Falle skizziert war:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) m C_m + i(i+1) D_m + \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} m s_2 + 2(m-2) t_2 \right] C_{m-2} \\ + \frac{\lambda_0}{\mu_0} [m s_3 + 2(m-3) t_3] C_{m-3} + \dots + i(i+1) (t_2 D_{m-2} + t_3 D_{m-3} + \dots) \\ + 2 [2(m-1) t_2 A_{m-2} + 3(m-2) t_3 A_{m-3} + \dots] = b k'^2 [m \varrho_m \\ + k_1 (m-1) \varrho_{m-1} + k_2 (m-2) \varrho_{m-2} + \dots - (C_{m-2} + k_1' C_{m-3} \\ + k_2' C_{m-4} + \dots) - \frac{n}{k'} (A_{m-2} + k_1 A_{m-3} + k_2 A_{m-4} + \dots)] \quad (298) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_m + (m+1) D_m + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} s_2 + 2 t_2 \right) C_{m-2} + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} s_3 + 2 t_3 \right) C_{m-3} + \dots \\ + (m-1) t_2 D_{m-2} + (m-2) t_3 D_{m-3} + \dots + 2 t_2 [A_{m-2} + (m-2) B_{m-2}] \\ + 3 t_3 [A_{m-3} + (m-3) B_{m-3}] + \dots = b k'^2 \left[\varrho_m + k_1 \varrho_{m-1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{n}{k'} (B_{m-2} + k_1 B_{m-3} + \dots) \right] \dots \dots \dots (299) \end{aligned}$$

wo wie im vorigen Falle

$$\begin{aligned} L_i = \frac{3}{2i+1} \sum_{m=1}^{\infty} [C_m - (m-i+2) A_m] \left(\frac{1}{m-i+2} + \frac{k_1}{m-i+3} \right. \\ \left. + \frac{k_2}{m-i+4} + \dots \right) + \frac{2i-2}{2i+1} A_{i-2} - \frac{c}{2k'} \dots \dots \dots (300) \end{aligned}$$

und für $m = i+1, i+2, \dots$

$$\begin{aligned} L_m = - \frac{3}{(m-i)(m+i+1)} [C_{m-2} + k_1 C_{m-3} + k_2 C_{m-4} + \dots \\ + k_1 A_{m-3} + 2 k_2 A_{m-4} + 3 k_3 A_{m-5} + \dots \\ + 3 \left(\frac{1}{3} A_{m-2} + \frac{1}{4} k_1 A_{m-3} + \frac{1}{5} k_2 A_{m-4} + \dots \right)] \dots \dots \dots (301) \end{aligned}$$

für $m = i$ führt sowohl (298) wie (299) auf

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2\right) C_i + (i + 1) D_i + \frac{4(i - 1)}{i} t_2 A_{i-2} = b k'^2 \left(\varrho_i - \frac{n}{i k'} A_{i-2} \right) \quad (302)$$

Für C_i , D_i und A_{i-2} erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2\right) C_i + (i + 1) D_i + \frac{4(i - 1)}{i} t_2 A_{i-2} = b k'^2 \left\{ \frac{3}{2i + 1} \sum_{m=i}^{\infty} [C_m \right. \\ \left. - (m - i + 2) A_m] \left(\frac{1}{m - i + 2} + \frac{k_1}{m - i + 3} + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{2i - 2}{2i + 1} A_{i-2} - \frac{c}{2k'} - \frac{n}{i k'} A_{i-2} \right\} \dots \dots \dots (303) \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} \sum_{m=i}^{\infty} C_m + 2 \sum_{m=i-2}^{\infty} (m + 1) A_m = 0 \quad \dots \dots \dots (304)$$

$$\mu_1 \sum_{m=i-2}^{\infty} (m B_m + A_m) = 0 \quad \dots \dots \dots (305)$$

Bis hierher war nur vorausgesetzt, daß ϱ , λ und μ eine Funktion von r allein und durch Reihen von der Form $a + br + cr^2 + dr^3 + \dots$ darstellbar sind.

§ 168. Anwendungen der Beziehungen von Hoskins. Hoskins setzte nun folgende spezielle Beziehungen voraus

$$\varrho = \varrho_0 (1 - K a^2) \quad \dots \dots \dots (306)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 (1 - H a^2) \\ \mu &= \mu_0 (1 - H a^2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda_0}{\mu} \\ \mu &= \frac{\mu_0}{\mu} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (307)$$

also stetige Zunahme aller drei Größen bis zum Erdmittelpunkt. Die Oberflächenwerte sind

$$\varrho_1 = \varrho_0 (1 - K), \quad \lambda_1 = \lambda_0 (1 - H), \quad \mu_1 = \mu_0 (1 - H) \quad \dots \dots (308)$$

Ferner ist

$$\varrho_m = \varrho_0 \left(1 - \frac{3}{5} K\right); \quad k' = \frac{\varrho_0}{\varrho_m} = \frac{5}{5 - 3K} \quad \dots \dots \dots (309)$$

Das Potential der störenden Kraft sei durch Kugelfunktionen 2. Grades darstellbar, also $i = 2$

$$S_i = S_2 = \cos^2 \Lambda' - \frac{1}{3} \quad \dots \dots \dots (310)$$

wo Λ' die Zenitdistanz des störenden Körpers ist; e ist nunmehr die Elliptizität eines ursprünglich sphärischen Körpers und α die Winkelverschiebung eines Radiusvektors nach einem Teilchen, für das $\Lambda' = 45^\circ$ ist. Die Gleichungen (278), (279) und (280) lauten nunmehr

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) a \frac{dy}{da} + 6\mu z + a y \frac{d\lambda}{da} + 2a \frac{d(ea)}{da} \frac{d\mu}{da} \\ = \frac{g\varrho r_0}{\varrho_m} \left(a \frac{dR}{da} - \frac{3y}{a} \int_0^a \varrho a^2 da - n\varrho_m e a^2 \right) \quad \dots \dots \dots (311) \end{aligned}$$

$$(\lambda + 2\mu) y + \mu \frac{d(az)}{da} + a \left(e + a \frac{d\alpha}{da} \right) \frac{d\mu}{da} = \frac{g\varrho r_0}{\varrho_m} (R - n\varrho_m \alpha a^2) \quad (312)$$

$$\Sigma \left[\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_m + (m+1) D_m - \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) H C_{m-2} - (m-1) H D_{m-2} - 2 H \left(A_{m-2} + (m-2) B_{m-2} \right) \right] a^m = b k'^2 (1 - K a^2) \Sigma \left[\mathfrak{L}_m a^m - \frac{n}{k'} B_m a^{m+2} \right] \quad (325)$$

Damit diese Beziehungen erfüllt sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein $m = 2$:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_2 + 3 D_2 - 2 H A_0 = b h'^2 \left(\mathfrak{L}_2 - \frac{n}{2 k'} A_0 \right) \quad (326)$$

$$m = 4, 6 \dots$$
$$D_m = \frac{b k'^2}{(m-2)(m+3)} \left[-2 K \mathfrak{L}_{m-2} + C_{m-2} - \frac{8}{5} K C_{m-4} + \frac{3}{5} K^2 C_{m-6} + \frac{n}{k'} (A_{m-2} - m B_{m-2} - K [A_{m-4} - m B_{m-4}]) \right] + H \left(D_{m-2} + \frac{4 C_{m-2} - 4 D_{m-2}}{(m-2)(m+3)} \right) \dots \dots \dots (327)$$

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_m = -(m+1) D_m + b k'^2 \left[\mathfrak{L}_m - K \mathfrak{L}_{m-2} - \frac{n}{k'} (B_{m-2} - K B_{m-4}) \right] + H \left[\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_{m-2} + \frac{4(m-1) C_{m-2} + (m^3 + 2 m^2 - 9 m + 14) D_{m-2}}{(m-2)(m+3)} \right] \quad (328)$$

\mathfrak{L}_m und \mathfrak{L}_{m-2} sind durch (322) bzw. (323) gegeben. Auf diese Weise kann jedes C_m und D_m durch Koeffizienten niederer Ordnung und zuletzt durch C_2 , P_2 und A_0 ausgedrückt werden. Für die Rechnung hat Hoskins diese Beziehungen noch weiter behandelt.

Die *Grenzbedingungen* (314) liefern schließlich C_2 , D_2 und A_0 :

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) C_2 + 3 D_2 - 2 H A_0 = b k'^2 \left[\frac{9}{25} \left(\sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m} - \sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m+5} \right) - \frac{3}{5} K \left(\sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m+2} - \sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m+5} \right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{n}{2 k'} \right) A_0 - \frac{c}{2 k'} \right] \quad (329)$$

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2 \right) \sum_2^\infty C_m + \frac{4}{5} \sum_2^\infty \frac{C_m + 3 D_m}{m} - \frac{24}{5} \sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m+5} + 2 A_0 = 0 \quad (330)$$

$$\sum_2^\infty D_m = \frac{2}{5} \sum_2^\infty \frac{C_m + 3 D_m}{m} + \frac{8}{5} \sum_2^\infty \frac{C_m - 2 D_m}{m+5} + A_0 = 0 \quad (331)$$

Wir müssen nunmehr den *Übergang von diesen Größen zu den beobachteten Werten h und γ* finden. Es war γ das Verhältnis der beobachteten zur theoretischen Gezeitenhöhe, h die Änderung des Potentials. Bezeichnen wir mit C und A die Hauptträgheitsmomente der deformierten Erde, mit J das Moment der ungestörten Erde, mit c wieder den Amplitudenfaktor des störenden Potentials (vgl. S. 478), so ist

$$h = \frac{f}{c}, \quad \text{wo} \quad f = \frac{A - C}{J} \quad (332)$$

Für $A - C$ gilt folgende Beziehung:

$$A - C = -\frac{8 \pi r_0^5}{15} \int_0^1 \varrho \left(y a^4 - \frac{d(e a^5)}{d a} \right) d a = -\frac{6 \pi r_0^5}{15} \int_0^1 \varrho (e + 3 \alpha) a^4 d a \quad (333)$$

nach (315).

$$J = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_0} \rho r^4 dr = \frac{8\pi a^5}{3} \int_0^1 \rho a^4 da$$

$$f = \left(2 \int_0^1 \rho (e + 3\alpha) a^4 da \right) : 5 \int_0^1 \rho a^4 da \quad (334)$$

Setzt man die Werte für ρ , e und α nach (306) bzw. (317) ein, so wird

$$f = \left[\frac{2}{5} \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + 3B_m) \left(\frac{1}{m+5} - \frac{K}{m+7} \right) \right] : \left(\frac{1}{5} - \frac{K}{7} \right) \quad (335)$$

oder nach (319), (320)

$$f = A_0 + \frac{2}{5} \sum_2^{\infty} \frac{C_m + 3D_m}{m} - \frac{14}{5(7-5K)} \sum_2^{\infty} \frac{C_m + 3D_m}{m+5} + \frac{2}{7-5K} \sum_2^{\infty} \frac{C_m + 3D_m}{m+7} \quad (336)$$

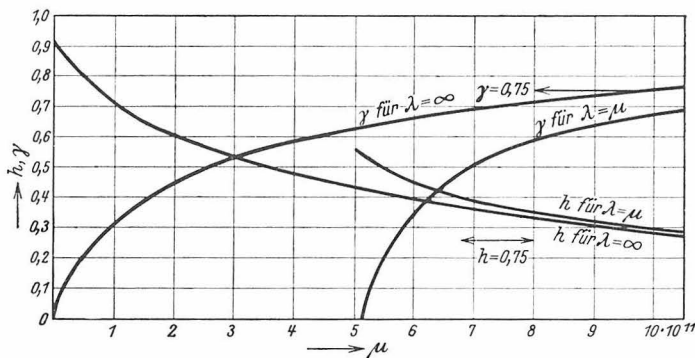


Fig. 162
 h und γ als
Funktion von μ
für $\mu = \text{const.}$
Nach HOSKINS

Hieraus ergibt sich h nach (332). Wir finden dann wieder γ nach

$$\gamma = 1 + h - q = 1 + \frac{f}{c} - 2 \frac{e_1}{c} \quad (337)$$

wo die Exzentrizität e_1 an der Erdoberfläche (d. h. die halbe elastische Verschiebung) nach (291) gegeben ist durch

$$e_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A = A_0 + \frac{2}{5} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{C_m + 3D_m}{m} + \frac{3}{5} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{C_m - 2D_m}{m+5} \quad (339)$$

Für die Rechnung setzte HOSKINS $\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_m$, $J = \frac{1}{3} M r_0^2$. Dies liefert $K = \frac{5}{6}$,

$$\rho = 2 \rho_m (1 - \frac{5}{6} a^2) = 11,054 (1 - \frac{5}{6} a^2) \quad (340)$$

und für

$a =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\rho =$	11,1	10,7	9,6	7,7	5,1	1,8

Der Wert an der Oberfläche ist entschieden zu klein. Auch für λ_1 und μ_1 setzte HOSKINS zu niedrige Werte (vgl. S. 492) ein:

$$\lambda_1 = \mu_1 = 2,542 \cdot 10^{11} \text{ CGS.}$$

Die Rechnungen wurden zunächst für eine homogene Erde durchgeführt, dann für das Dichtegesetz (306), aber a) $\lambda = \mu = \text{konstant}$ (variabel), b) $\mu = \text{konstant}$, variabel, $\lambda = \infty$ (inkompressible Erde). Fig. 162 zeigt das Ergebnis. Man sieht

als wichtigstes Resultat, das übrigens ähnlich auch im Falle der homogenen Erde sich ergibt, daß bei Voraussetzung von Inkompressibilität der Wert von h zu klein, der Wert von γ zu groß herauskommt, und zwar beträgt der Fehler bei den in Frage kommenden Werten etwa $-0,01$ bei h , $+0,06$ bei γ , ziemlich unabhängig von der Annahme über die Dichte (konstant oder variabel).

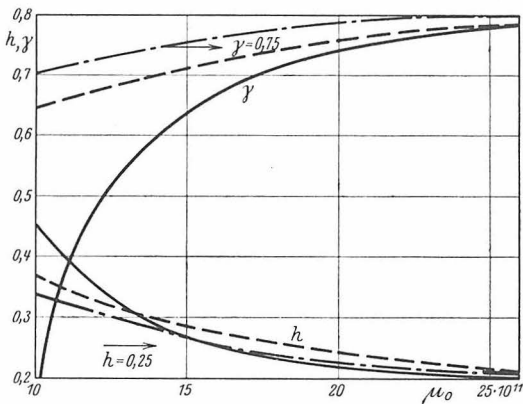


Fig. 163
 h und γ als Funktion von μ_0 (Righeit im Erdzentrum)
a) nach HOSKINS, $\lambda = \mu$, $\mu = 2,5 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² ———,
b) nach PREY, $\lambda = \infty$, $\mu_1 = 2,5 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² — — —,
c) desgleichen, $\mu_1 = 6,0 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² - - - - -

Fig. 163 zeigt die entsprechenden Kurven (ausgezogen) für den Fall, daß die LAMÉschen Koeffizienten nach dem Erdmittelpunkt stetig zunehmen und einander gleich sind. Zum Vergleich sind hier die entsprechenden Kurven nach den Rechnungen von PREY beigelegt und zwar gestrichelt unter Voraussetzung

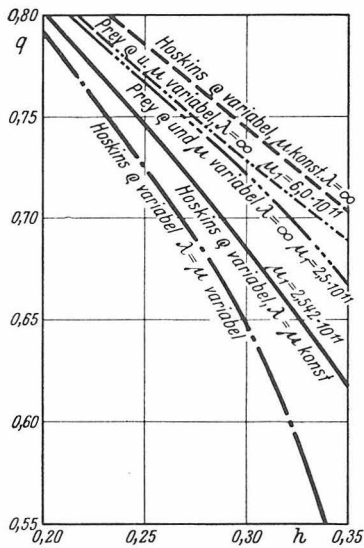


Fig. 164
 q als Funktion von h unter verschiedenen Voraussetzungen

der gleichen Righeit an der Erdkruste wie bei HOSKINS, strichpunktiert für den Wert $6 \cdot 10^{11}$, der zur Zeit am wahrscheinlichsten zu sein scheint (vgl. S. 492). Beim Vergleich ist zunächst zu berücksichtigen, daß von PREY und HOSKINS etwas verschiedene Annahmen über das Dichtegesetz im Erdinnern gemacht wurden. Im übrigen betragen die Abweichungen der verschiedenen Kurven von h untereinander in dem in Frage kommenden Gebiet ($h = \frac{1}{4}$) höchstens 0,025, liegen also innerhalb der Beobachtungen Genauigkeit. Bei γ ist der Unterschied zwischen

der Kurve von HOSKINS für $\lambda = \mu$ und der Kurve von PREY für $\lambda = \infty$ ebenfalls nur 0,025 für den in Frage kommenden Bereich (Nachbarschaft von $\gamma = \frac{3}{4}$), allerdings liegen die Abweichungen in beiden Fällen im umgekehrten Sinne. Ob der Unterschied in der Annahme über die Dichte daran schuld ist, läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden.

Die strichpunktierte Kurve für γ in Fig. 163 zeigt, daß hier der Einfluß der Annahme über die Righeit an der Erdoberfläche größer ist als bei h .

Aus Fig. 162 erkennt man im übrigen, daß im Falle kleiner Righeit trotzdem h und γ die gleichen Werte annehmen können wie bei größerer Righeit, wenn λ einen genügend großen Wert erreicht.

Als günstigsten Ansatz für λ und μ betrachtete HOSKINS schließlich

$$\mu = \lambda = 1,695 \cdot 10^{12} (1 - 0,85 a^2) \quad a = \frac{r}{r_0} \dots \dots \dots (341)$$

was zu μ_1 (an der Erdoberfläche) $= 2,5 \cdot 10^{11}$ CGS und μ_0 (im Erdzentrum) $= 17 \cdot 10^{11}$ führt. Zum Vergleich sei das Ergebnis nach der Theorie von PREY (S. 492) wiederholt:

$$\begin{aligned} \mu &= 1,5 \cdot 10^{12} (1 - 0,6 a^2) \text{ für } \mu_1 = 6 \cdot 10^{11} \\ \mu &= 1,6 \cdot 10^{12} (1 - 0,83 a^2) \text{ für } \mu_1 = 3 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$

in guter Übereinstimmung mit den Werten für HOSKINS.

Zum Schluß gibt Fig. 164 q als Funktion von h unter verschiedenen Voraussetzungen.

§ 169. Beziehungen für die Righeit unter der Voraussetzung, daß diese erst zu- und dann stetig auf Null abnimmt. Die Untersuchungen über Erdbebenwellen (Band 4) haben bisher keine Wellen ausfindig machen können, die den Erdkern als Transversalwellen durchlaufen haben. Wir müssen daher mit der Möglichkeit rechnen, daß im Erdkern die Righeit sehr klein, vielleicht sogar praktisch Null ist. Um die Frage zu untersuchen, ob eine so kleine Righeit mit den beobachteten Werten für h und q vereinbar ist, führte A. PREY eine Auswertung der Grundgleichung (211) (S. 484) auch unter der Voraussetzung durch, daß die Dichte wie in dem S. 484ff. behandelten Falle nach dem Gesetz von ROCHE nach innen zunimmt, daß dagegen die Righeit erst zu-, dann stetig auf Null im Erdzentrum abnimmt. Das einfachste Gesetz, das man in diesem Falle unter der weiteren Voraussetzung, daß die Ableitung der Righeit nach der Tiefe im Erdzentrum ebenfalls Null ist, erhält, lautet

$$\mu = \mu_1 a^2 (1 - \eta a^2), \quad \text{wo} \quad a = \frac{r}{r_0} \dots \dots \dots (342)$$

Die Bedingung $\left[\frac{\partial \mu}{\partial a} \right]_{a=0} = 0$ muß erfüllt sein, damit die Kurve $\mu(a)$ beim

Durchgang durch den Erdmittelpunkt keinen Knick besitzt.

PREY verfuhr nun ganz analog wie im früheren Falle. Der Koeffizient der niedersten Potenz von a^4 , den man erhält, wenn man den Wert von μ nach (342) in (211) einsetzt, muß analog wie dort (S. 485) Null werden. Es ergeben sich so sechs Gleichungen mit den Wurzeln

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = -2n - 1 \quad m_4 = -2n + 1 \\ m_{5,6} &= -\frac{2n+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{2} + 4} \dots \dots \dots (343) \end{aligned}$$

Die negativen Wurzeln kommen wieder nicht in Frage, und man erhält analog (217a)

$$q_n = A \sum_0^\infty \alpha_s a^{2s} + B \sum_1^\infty \alpha_s' a^{2s} + C \sum_0^\infty \alpha_s'' a^{m_5 + 2s} \quad . \quad . \quad . \quad (344)$$

Die Rekursionsformel analog (218) lautet nun

$$\begin{aligned} &\alpha_{s+2} (2s+2) (2s+4) (2s+2n+3) (2s+2n+5) [(2s+4) \\ &(2s+2n+5) - 4] + \alpha_{s+1} [\{ - (2s+2)^2 (2s+2n+3)^2 [(2s+4) \\ &(2s+2n+5) - 8] + 16 (2s+2) (2s+2n+3) (2s+3-n^2) \} \gamma \\ &+ (2s+2) (2s+2n+3e_1) - \alpha_s [(2s+2) (2s+2n+3) - 10] e = 0 \end{aligned} \quad (345)$$

Die gleiche Formel gilt auch für α_s' ; für α_s'' ist überall $2s$ durch $m_5 + 2s$ zu ersetzen. Die Ausdrücke (224) und (225) bleiben ungeändert. An Stelle von (229) ergibt sich

$$\begin{aligned} b_s = &\varrho_0 (c_s - \beta c_{s-1}) + \frac{\mu_1}{n(n+1)r_0^2} \{ [2s(2s+2n+1)(2s+n+1) \\ &- 4(2s+1-n^2)] \alpha_s - [(2s-2)(2s+2n+1)(2s+n+1) \\ &- 8(2s-1-n^2)] \gamma_1 \alpha_{s-1} \} \quad (346) \end{aligned}$$

Indem PREY nun analog vorgeing wie auf S. 486ff., fand er statt (239) schließlich

$$- A \, 2 \, \varrho_0 \, \beta \, c_0 - A' \left(2 \, \varrho_0 \, \beta \, c_0' - \frac{140 \, \mu}{6 \, r_0^2} \right) - A'' \, 2 \, \varrho_0 \, \beta \, c_0'' = 2 \, \varrho_0 \, \beta \, w_2 \quad (347)$$

Die Gleichungen (242) und (243) bleiben ungeändert, wir erhalten aus ihnen und (347) wieder A , A' und A'' . Die ganze Rechnung erfolgt analog wie im früheren Falle, nur sind die oben angegebenen Beziehungen an Stelle der erwähnten früheren zu benutzen.

Tabelle 53

Werte für q , h und γ unter verschiedenen Voraussetzungen über die Righeit μ in 50 km Tiefe sowie die Konstante η , falls μ im Erdinnern gegeben ist durch $\mu = \mu_1 a^2 (1 - \eta a^2)$, wo $a = \frac{r}{r_0}$. Die Erde ist als inkompressibel vorausgesetzt, für die Dichte das Gesetz von ROCHE angenommen. Angaben für μ in Dyn/cm². Der letzte Fall ist extrapoliert.

Vorausgesetzt			Berechnet		
μ	μ_1	η	q	h	γ
$3 \cdot 10^{11}$	$70 \cdot 10^{11}$	0,957	0,478	0,261	0,783
$3 \cdot 10^{11}$	$60 \cdot 10^{11}$	0,95	0,526	0,286	0,760
$3 \cdot 10^{11}$	$50 \cdot 10^{11}$	0,94	0,579	0,315	0,736
$3 \cdot 10^{11}$	$40 \cdot 10^{11}$	0,925	0,681	0,371	0,690
$6 \cdot 10^{11}$	$60 \cdot 10^{11}$	0,90	0,498	0,271	0,773
$6 \cdot 10^{11}$	$50 \cdot 10^{11}$	0,88	0,552	0,301	0,749
$6 \cdot 10^{11}$	$40 \cdot 10^{11}$	0,85	0,641	0,350	0,709
$6\frac{1}{2} \cdot 10^{11}$	$56,5 \cdot 10^{11}$	0,885	0,57	0,28	0,76

Die Änderung des Potentials in bezug auf einen äußeren Punkt lautet, falls f = Gravitationskonstante

$$U_a = \frac{4}{5} \pi f \varrho \frac{r_0^5 S_2}{r^3} (w + n \alpha^5 w_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351)$$

$$g = \frac{4}{3} \pi f \varrho r_0 (1 + n \alpha^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352)$$

und für die Oberfläche

$$U_a = \frac{3}{5} r_0 g S_2 \frac{w + n \alpha^5 w_1}{1 + n \alpha^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

Nun ist nach der Definition von h (S. 478) $h = U_a : V_0$, also

$$h = \frac{3}{5} \frac{g}{r_0 h_2} \frac{w + n \alpha^5 w_1}{1 + n \alpha^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354)$$

HERGLOTZ fand, daß w und w_1 gegeben werden durch

$$H_1 w - H_2 w_1 + \frac{r_0}{g} h_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (355)$$

$$H_3 w - H_4 w_1 - \frac{r_0}{g} h_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$

wo

$$H_1 = \frac{3}{5} \frac{1}{1 + n \alpha^3} + \frac{\vartheta}{5 n \alpha^2} \frac{35 (8 - 3 \alpha^2) - 2 (64 - 24 \alpha^2 + 21 \alpha^5 - 64 \alpha^7) \varepsilon}{4 - 7 \alpha^3 + 3 \alpha^7 - 2 (1 - \alpha^3) (1 - \alpha^7) \varepsilon} \quad (357)$$

$$H_2 = \frac{1 + \frac{2}{3} n}{1 + \alpha^3 n} + \frac{\vartheta}{5 n \alpha^2} \left[19 (m - 1) + \frac{175 - 2 (43 + 21 \alpha^5 - 64 \alpha^7) \varepsilon}{4 - 7 \alpha^3 + 3 \alpha^7 - 2 (1 - \alpha^3) (1 - \alpha^7) \varepsilon} \right] \quad (358)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3}{5} \frac{1}{1 + n \alpha^3} + \frac{\vartheta}{5} \left[19 + \alpha^3 \frac{7 (8 - 3 \alpha^2)^2 - 2 (64 - 21 \alpha^4 - 43 \alpha^7) \varepsilon}{4 - 7 \alpha^3 + 3 \alpha^7 - 2 (1 - \alpha^3) (1 - \alpha^7) \varepsilon} \right] \quad (359)$$

$$H_4 = n \alpha^5 H_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (360)$$

Es ist dann

$$q = \frac{H_2 + H_4}{H_2 H_3 - H_1 H_4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (361)$$

$$h = \frac{3}{5} \frac{H_2 + H_4 + n \alpha^5 (H_1 + H_3)}{(1 + n \alpha^3) (H_2 H_3 - H_1 H_4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (362)$$

HERGLOTZ und ähnlich JEFFREYS wandten nun diese Beziehungen auf eine zweiteilige Erde an, die entsprechend den älteren Ansichten geschichtet ist. Es ergab sich ähnlich wie in dem in § 166 untersuchten Falle, daß dann q und h zwar in Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu etwa $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ gefunden werden können, daß aber dann die Righeit, die sich für den Mantel ergibt, wesentlich kleiner ist, als wir sie aus den Erdbebenwellen finden. JEFFREYS untersuchte daher, ob sich nicht auch eine brauchbare Lösung ergibt, wenn man die Righeit im Kern sehr klein annimmt. Für die Dichte setzte er eine Verteilung entsprechend einem Vorschlage von WIECHERT voraus, und fand auf Grund der mittleren Dichte der Erde sowie deren Trägheitsmoment die Beziehungen¹⁾

$$\varrho (1 + n \alpha^3) = 5,53 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (363)$$

$$n (5 \alpha^3 - 6 \alpha^5) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

¹⁾ The Earth, S. 198, 1924.

Setzt man nun noch zur Festlegung der Kerngrenze entsprechend den Ergebnissen der Seismologie $\alpha = 0,545$, so ergeben sich als mittlere Dichten für Mantel und Kern 4,27 bzw. 12,04 sowie $n = 1,821$. Vermutlich ist die Dichte im Kern etwas kleiner, im Mantel etwas größer. Als mittlere Geschwindigkeit der Transversalwellen im Mantel nahm JEFFREYS 6,3 km/sec an, mit der angegebenen Dichte wird dann im Mantel $\mu = 17 \cdot 10^{11}$. Für $m = 0$ und $m = 1$ (also Righeit im Kern 0 bzw. gerade so groß als im Mantel) ergibt sich dann:

$$\begin{array}{lll} \mu_c = 0 & q = 0,667 & h = 0,372. \\ \mu_c = \mu \text{ konstant in der Erde} & q = 0,364 & h = 0,191. \\ \text{Nach den Beobachtungen müßte sein} & q = 0,5 & h = 0,25 \end{array}$$

JEFFREYS schloß hieraus, daß die Righeit des Kernes beträchtlich kleiner ist als die des Mantels, und schätzt für den Kern $\lambda : \mu = 12 : 1$. Die Geschwindigkeit der Transversalwellen im Erdkern wäre dann 2—3 km/sec; nach einer Übersichtsrechnung von ihm könnte sogar μ im Kern praktisch Null sein und trotzdem zu den beobachteten Werten von q und h führen, wenn man die Änderungen der Righeit mit der Tiefe im Erdmantel und die Änderung der Dichte mit der Tiefe berücksichtigt, wodurch sowohl die berechneten Werte von q wie die von h verkleinert würden.

Tabelle 55

Berechnete Werte für h und q sowie γ unter verschiedenen Voraussetzungen mit und ohne Berücksichtigung der Wirkung der Ozeangezeiten auf den Erdkörper nach Zusammenstellung von ROSENHEAD (für eine zweiteilige Erde unter den S. 507 angegebenen Voraussetzungen).

a = einteilige Erde b = zweiteilige Erde

Voraussetzung	Gefunden					
	a			b		
	h	γ	q	h	γ	q
A. Statische Theorie						
Ohne Berücksichtigung der Ozeangezeiten	0,77	0,49	1,28	0,36	0,70	0,67
Mit Berücksichtigung der Ozeangezeiten	0,61	0,51	1,10	0,27	0,72	0,55
B. Dynam. Theorie, 14 tägl. Flut						
Ozeantiefe gleichmäßig 2,2 km:						
Ohne Berücksichtigung der Ozeangezeiten	0,77	0,49	1,28	0,36	0,70	0,67
Mit Berücksichtigung der Ozeangezeiten	0,77	0,49	1,27	0,29	0,71	0,58
Ozeantiefe gleichmäßig 8,9 km:						
Ohne Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,36	0,70	0,67
Mit Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,28	0,71	0,57
C. Dynam. Theorie, $\frac{1}{2}$ tägl. Flut						
Ozeantiefe gleichmäßig 2,2 km:						
Ohne Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,36	0,70	0,67
Mit Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,12	0,47	0,65
Ozeantiefe gleichmäßig 8,9 km:						
Ohne Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,36	0,70	0,67
Mit Berücksichtigung der Ozeangezeiten	—	—	—	0,80	0,09	1,70

§ 171. Untersuchungen von ROSENHEAD über die Righeit der Erde. L. ROSENHEAD¹⁾ führte das im vorigen Paragraphen behandelte Problem etwas weiter, indem er vor allem den Einfluß der Meeresgezeiten auf den Meeresboden zu berücksichtigen suchte. Er benutzte folgende Zahlenwerte nach JEFFREYS (vgl. S. 507—508):

Kernradius = $0,545 r_0$,
 Dichte des Mantels, konstant = $4,27 \text{ gr/cm}^3$,
 Kerndichte, konstant = $12,04 \text{ gr/cm}^3$,
 Righeit des Mantels, konstant = $1,695 \cdot 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$,
 die Righeit des Kernes ist 0,

und untersuchte nun die verschiedenen Gezeiten, welche sich dann ergeben. Da sich seine Arbeit mehr auf die Theorie der Gezeiten, als auf die Untersuchung der Righeit bezieht, wollen wir uns auf die Wiedergabe seiner Ergebnisse beschränken, wobei wir die Ergebnisse von R. O. STREET²⁾ für eine homogene Erde mit anführen. In Tabelle 55 sind die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt.

Man erkennt aus der Tabelle sehr schön den Einfluß der verschiedenen Vorgänge, sieht aber anderseits, daß die unter plausiblen Voraussetzungen für eine zweiteilige Erde mit flüssigem Kern berechneten Werte für h und q recht gut den aus Beobachtungen abgeleiteten entsprechen.

§ 172. Zusammenfassung. Blicken wir auf die Ergebnisse dieses Kapitels zurück, so finden wir, daß kein Grund dafür besteht, an den aus Erdbebenbeobachtungen abgeleiteten Werten für die Righeit des Mantels und der Zwischenschicht zu zweifeln. Dann folgt aber aus den Untersuchungen über die Polbewegungen und die Gezeiten, daß die Righeit des Kernes sehr klein sein muß, was durchaus zu der Tatsache paßt, daß Transversalwellen durch den Kern nicht feststellbar sind.

Unter der Erdkruste von rund 50 km Dicke mit wechselnden Werten für die Righeit (Größenordnung $3 \cdot 10^{11} \text{ Dyn/cm}^2$) haben wir also im Mantel und in der Zwischenschicht eine Zunahme der Righeit auf die Größenordnung $3 \cdot 10^{12}$, während an der Kerngrenze die Righeit auf einen sehr kleinen Wert springt, so daß sich der Kern praktisch wie eine Flüssigkeit verhält.

§ 173. Die Stabilität der Erde als Funktion der Righeit³⁾. Ähnlich wie bei der Untersuchung der Righeit der Erde wurden auch die ersten theoretischen Betrachtungen über die Stabilität der Erde für den Fall durchgeführt, daß Dichte und Righeit im Erdinnern konstant sind. Diese Untersuchungen von Lord RAYLEIGH und von A. E. H. LOVE wurden dann von E. MEISSNER erweitert für den Fall, daß für die Dichte das Gesetz von ROCHE und für die Righeit und die LAMÉsche Konstante λ ähnliche Gesetze gelten, und daß ferner die POISSONSche Konstante $\sigma = \frac{1}{4}$ ist, also $\mu = \lambda$. Wir haben hier also die parallele Entwicklung wie bei der Untersuchung der Righeit selbst. MEISSNER setzte

$$\rho = P(1 - \alpha r^2); \quad \lambda = \mu = M(1 - \beta r^2) \quad . \quad . \quad . \quad (365)$$

¹⁾ Monthly Not. Roy. Astron. Soc. London, Geophys. Suppl., 2, 140 und 169, 1929.

²⁾ Ebenda, 1, 292, 1925.

³⁾ Literatur: LORD RAYLEIGH, Roy. Soc. Proc. A, 77, 486, 1906. — A. E. H. LOVE, Some problems of Geodynamics, Kap. 7, Cambridge 1911. — E. MEISSNER, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl., 1, 63, 1923. — H. JEFFREYS, Ebenda, 1, 371, 1926.

Die Geschwindigkeit \mathfrak{B} von Transversalwellen ist dann nach (134) gegeben durch

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{M}{P} \frac{1 - \beta r^2}{1 - \alpha r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (366)$$

Es existiert nun ein Minimalwert von M , bei dem die Erde aufhört, stabil zu sein. Ist p_0 der ursprüngliche hydrostatische Druck, V_0 das Potential der Schwere, ρ_0 die ursprüngliche Dichte, so ist unter Berücksichtigung von (365)

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial V_0}{\partial r} = - \frac{4\pi g}{r^2} \int_0^r \rho_0 r^2 dr = - \frac{4\pi g}{3} P \left(r - \frac{3}{5} \alpha r^3 \right) \quad . \quad (367)$$

Ist U die radiale Verschiebung, so ist die Dichte ρ nach der Verschiebung gegeben durch

$$\rho = \rho_0 - U \frac{\partial \rho}{\partial r} - \rho_0 \Theta \quad . \quad . \quad . \quad (368)$$

wo Θ die kubische Dilatation ist (vgl. (120) S. 451)

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

Das neue Potential V ergibt sich als Summe des ursprünglichen Potentials V_0 und eines Potentials W entsprechend einer Dichteverteilung

$$- \left(U \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \Theta \rho_0 \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_0 U)}{\partial r} \quad .$$

Es ist also

$$V = V_0 + W,$$

wo W die Poissonsche Gleichung befriedigt:

$$\nabla^2 W = 4\pi g \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_0 U)}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad (370)$$

Da W nur von r abhängt, ist

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (371)$$

und somit nach (370)

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 4\pi g \rho_0 U \quad . \quad . \quad . \quad (372)$$

Zwischen den Komponenten der entstehenden Zusatzspannungen σ'_r und σ'_t und den Komponenten ε_r und ε_t bestehen die Beziehungen

$$\sigma'_r = \lambda \Theta + 2\mu \varepsilon_r; \quad \sigma'_t = \lambda \Theta + 2\mu \varepsilon_t \quad . \quad . \quad . \quad (373)$$

Setzen wir die Werte für Θ nach (369) und für ε_r und ε_t :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_t = \frac{U}{r}$$

ein, so ergibt sich, falls $\lambda = \mu$

$$\sigma'_r = \mu \left(3 \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \right); \quad \sigma'_t = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial r} + 4 \frac{U}{r} \right) \quad . \quad . \quad (374)$$

Da der ursprüngliche hydrostatische Druck gegeben ist durch

$$p_0 - U \frac{\partial p_0}{\partial r},$$

ergeben sich als Gesamtspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \left(p_0 - U \frac{\partial p_0}{\partial r} \right) + 3 \mu \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \mu \frac{U}{r} \\ \sigma_t &= - \left(p_0 - U \frac{\partial p_0}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial U}{\partial r} + 4 \mu \frac{U}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (375)$$

Die Gleichung für die radiale elastische Verschiebung kann angesetzt werden in der Form

$$\frac{\partial (r^2 \sigma_r)}{\partial r} - 2 r \sigma_t + \rho r^2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} + q^2 U \right) = 0 \dots \dots \dots (376)$$

falls U proportional e^{igt} angenommen wird.

Setzt man hierin die Werte von σ_r , σ_t , ρ und V ein, eliminiert p_0 und W unter Benutzung von (367) und (372) und vernachlässigt Glieder höherer Ordnung, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(3 \mu r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + U \left(2 r \frac{\partial \mu}{\partial r} - 6 \mu - 4 \rho_0 r \frac{\partial V_0}{\partial r} + q^2 \rho_0 r^2 \right) = 0 \dots (377)$$

Nun ist nach (374) für $r = r_0 + U(r_0)$ oder angenähert für $r = r_0$

$$\left[3 \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \right]_{r=r_0} = 0 \dots \dots \dots (378)$$

Hierdurch wird q für die verschiedenen Schwingungen definiert. Instabilität der Erde tritt ein, wenn die Lösung von (378) Null wird. Dann ist U ein Integral von

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + U \left(\frac{2}{3} r \frac{\partial \mu}{\partial r} - 2 \mu - \frac{4}{3} \rho_0 r \frac{\partial V_0}{\partial r} \right) \dots \dots (379)$$

und (378) ist für $r = r_0$ erfüllt. MEISSNER setzt nun zur Abkürzung

$$U = r \cdot Z; \quad x = \beta r^2; \quad H = \frac{4 \pi g P^2}{9 \beta M}; \quad \delta = \frac{\alpha}{\beta} \dots (380)$$

und findet dann aus (379) bzw. (365) und (367)

$$\begin{aligned} &x(1-x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2} x \right) \frac{\partial Z}{\partial x} \\ &+ \left[-\frac{5}{6} + H \left(1 - \frac{3}{5} \delta x \right) (1 - \delta x) \right] Z = 0 \dots \dots (381) \end{aligned}$$

$$\left[x \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{5}{6} Z \right]_{x=0} = 0 \dots \dots \dots (382)$$

MEISSNER setzte nun $Z = e^{mx} \cdot \Phi$ und wählte für m einen Wert, der den Koeffizienten von x^2 im Ausdruck, der mit Φ multipliziert wird, zu Null macht. Dies ergibt

$$m^2 = \frac{3H}{5} \delta^2 = \frac{4 \pi g P^2 \delta^2}{15 \beta M} \dots \dots \dots (383)$$

Dann lauten die beiden vorletzten Gleichungen

$$x(1-x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left[\frac{5}{2} + \left(2m - \frac{7}{2} \right) x - 2m x^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[\left(m^2 - \frac{7}{2} m - \frac{8m^2}{3\delta} \right) x + \left(\frac{5}{2} m - \frac{5}{6} + \frac{5m^2}{3\delta^2} \right) \right] \Phi = 0 \quad (384)$$

$$\mathfrak{L}(m) = \left[x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{5}{6} + m x \right) \Phi \right]_{x=\beta r_0^2} = 0 \quad (385)$$

Setzt man nun

$$\Phi = \sum_0^\infty a_n x^n \quad (386)$$

wo $a_n = 0$, falls n negativ, $a_0 = 1$, sonst

$$(n+1)(2n+5)a_{n+1} = \left[n(2n-5-4m) + \frac{5}{3} - 5m - \frac{10m^2}{3\delta^2} \right] a_n + \left[4nm + 3m - 2m^2 + \frac{16m^2}{3\delta} \right] a_{n-1},$$

so wird, falls $\xi = \beta \alpha^2$

$$\mathfrak{L}(m) = \sum_1^\infty n a_n \xi^n + \left(\frac{6}{5} + m\xi \right) \sum_0^\infty a_n \xi^n \quad (387)$$

wo m so bestimmt werden muß, daß $\mathfrak{L}(m) = 0$ (nach 385).

Zur Auswertung dieses Ausdruckes setzte MEISSNER $\rho_m = 2\bar{\rho}$, wo $\bar{\rho}$ die Dichte an der Erdoberfläche, ρ_m die mittlere Erddichte sind. Nach dem Gesetz von ROCHE wäre $\bar{\rho} = P(1 - \alpha r_0^2)$, $\rho_m = P(1 - \frac{3}{2} \alpha r_0^2)$, somit $\alpha r_0^2 = \frac{5}{7}$. MEISSNER setzte weiter $\mathfrak{B}_c: \mathfrak{B} = 0,3$ (Geschwindigkeit der Transversalwellen im Erdmittelpunkt und an der Erdoberfläche). Unter diesen (unzutreffenden!) Voraussetzungen ergab sich als Lösung von (387) $m = 0,98$ und nach (383) bzw. den Gleichungen für die einzelnen Werte $M = 15 \cdot 10^{11}$ CGS als Grenzwert für die Stabilität der Erde.

Unter Voraussetzung des ROCHEschen Gesetzes für die Dichte und eines ähnlichen Gesetzes für die Righeit wurde nun in der Tat ein Wert für M , die Righeit im Erdmittelpunkt, gefunden, der in der Nähe von $15 \cdot 10^{11}$ liegt (vgl. S. 492). Eine Entscheidung über die Frage, ob die Righeit im Erdkern Null sein kann, liefert diese Untersuchung jedoch nicht, da u. a. vorausgesetzt war, daß die LAMÉschen Konstanten λ und μ gleich sind. Dies gilt zwar mit einiger Annäherung im Mantel der Erde, nicht aber für den Kern, falls in diesem μ sehr klein ist.

Hier setzt nun die Arbeit von JEFFREYS ein. Dieser ging von den *Gleichungen für die Deformation eines festen Körpers* aus, der ursprünglich im hydrostatischen Gleichgewicht war, und auf den nun Spannungen wirken. Diese Beziehungen wollen wir zunächst ableiten¹⁾.

Wir gehen von einem Elementarprisma mit den Seiten dx , dy und dz aus, die parallel den Koordinatenachsen liegen. Der Koordinatenanfang sei im Mittelpunkt des Prismas. Die Kraftkomponenten auf eine Fläche senkrecht zur x -Achse seien pro Volumeinheit p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} . Als Resultante in bezug auf zwei gegenüberliegende Flächen ergeben sich drei Komponenten von der Form

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (\text{vgl. (126) S. 453}) \quad (388)$$

¹⁾ Nach H. JEFFREYS, The Earth, 2nd Edition, S. 161, Cambridge, 1929.

$$(\rho X, \rho Y, \rho Z) dx dy dz \dots \quad (389)$$
$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \dots \dots \dots (390)$$
$$\left. \begin{aligned} p_{xx,0} &= p_0 - u \frac{\partial p_0}{\partial x} - v \frac{\partial p_0}{\partial y} - w \frac{\partial p_0}{\partial z} \\ p_{xy,0} &= 0; \quad p_{xz,0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (391)$$
$$\rho = \rho_0 - \frac{\partial (\rho_0 u)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho_0 v)}{\partial y} - \frac{\partial (\rho_0 w)}{\partial z} = \rho_0 + \rho_1 \quad . \quad . \quad . \quad (392)$$
$$\rho_0 X_0 + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \quad (393)$$
$$\begin{aligned} p_{xx} &= p_{xx,0} + \Delta p_{xx}; & p_{xy} &= p_{xy,0} + \Delta p_{xy} \quad \text{usw.} \\ \Delta p_{xx} &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; & \Delta p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \rho X + \frac{\partial p_{xx,0}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy,0}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz,0}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \dots \dots \dots (394) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \varrho_0 X_1 + \varrho_1 X_0 + \frac{\partial}{\partial x} \{ \varrho_0 (u X_0 + v Y_0 + w Z_0) \} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} \quad (395) \end{aligned}$$

Bei dem vorliegenden *Problem der Stabilität der Erde* können wir setzen

$$u = x \frac{U}{r}; \quad v = y \frac{U}{r}; \quad w = z \frac{U}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (396)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{r} + \frac{x^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right); \quad \Theta = \frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \quad (397)$$

Die Glieder in (395), welche μ und λ enthalten, ergeben nach JEFFREYS¹⁾

$$\frac{x}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 U)}{\partial r} \right\} - 4 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{U}{r} \right] \dots \dots \dots (398)$$

Ist R die äußere Kraft pro Masseneinheit, so wird

$$u X_0 + v Y_0 + w Z_0 = U R_0 \dots \dots \dots (399)$$

$$R = R_0 + R_1 \dots \dots \dots (400)$$

$$R_1 = 4\pi f \rho_0 U \quad (f = \text{Gravitationskonstante}) \quad (401)$$

$$\rho_1 = -\rho_0 \Theta - U \frac{\partial' \rho_0}{\partial r} \dots \dots \dots (402)$$

und (395) lautet in unserem Falle

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 U)}{\partial r} \right\} - 4 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{U}{r} - \frac{4 \rho_0 R_0 U}{r} \dots \dots (403)$$

Die Zusatzspannung in normaler Richtung wird

$$p_{xx} = \Theta \lambda + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda \frac{U}{r} \quad (\text{vgl. S. 452}) \quad (404)$$

ferner ist

$$p_{xy} = p_{xz} = 0.$$

Setzt man $\lambda = \mu$, so geht (403) in (374) über. Setzt man andererseits $\mu = 0$ und führt den Inkompressibilitätsfaktor k ein, so wird nach (99) $\lambda = k$ und nach (403)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k}{r^2} \frac{\partial (r^2 U)}{\partial r} \right\} - 4 \rho_0 R_0 \frac{U}{r} \dots \dots \dots (405)$$

Der Ausdruck $\frac{k}{r^2} \frac{\partial (r^2 U)}{\partial r}$ muß stetig im Erdinnern sein. Die Normalspannung muß innen und außen an der Kerngrenze gleich sein und an der Erdoberfläche Null werden. Wenn das System gerade unstabil wird, muß diese Bedingung durch einen Wert U erfüllbar sein, der nicht von der Zeit abhängt.

Benutzen wir nun die Dichteverteilung von S. 507; die Schwere an der Erdoberfläche sei g , die übrigen Größen für die Erdoberfläche seien ρ , μ , k . Sei ferner

$$R_0 = -g\gamma; \quad k = \alpha k; \quad r = \xi r_0; \quad \rho_0 = s \rho_0; \quad \varepsilon = \frac{g \rho_0 r_0}{k} \quad (406)$$

Nach (405) ist dann im Falle der Grenze der Unstabilität

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\alpha}{\xi^2} \frac{\partial (\xi^2 U)}{\partial \xi} \right\} + 4 \varepsilon s \gamma U = 0 \dots \dots \dots (407)$$

Setzen wir weiter für die Kerngrenze $r_k = \alpha r_0$, $\alpha = 0,545$, so wird unter den S. 508 gemachten Annahmen

$$\left. \begin{array}{l} \text{für} \quad 0 < \xi < \alpha; \quad s = 2,82; \quad \alpha = 3,45; \\ \quad \quad \gamma = \frac{1+n}{1+n\alpha^3} \xi = 2,18 \xi \\ \text{für} \quad \alpha < \xi < 1; \quad s = 1; \quad \alpha = 1; \\ \quad \quad \gamma = \frac{1}{1+n\alpha^3} \left(\xi + \frac{n\alpha^3}{\xi^2} \right) = 0,773 \xi + 0,224 \xi^{-2} \end{array} \right\} \dots \dots (408)$$

¹⁾ Monthly Not. a. a. O. S. 380 ff.

Aus (405) folgt, falls zur Abkürzung $Q(a) = \int_0^a a \, d\zeta$,

$$U = \frac{1}{\zeta} Q \left[\frac{\zeta^2}{\zeta} \left\{ C - Q(4\varepsilon s\gamma U) \right\} \right]; \quad C = \text{Konstante} \quad (409)$$

$$= \frac{C}{\zeta^2} \left[Q \frac{\zeta^2}{\zeta} - 4\varepsilon Q \frac{\zeta^2}{\zeta} Q \frac{s\gamma}{\zeta^2} Q \frac{\zeta^2}{\zeta} + 16\varepsilon^2 Q \frac{\zeta^2}{\zeta} Q \frac{s\gamma}{\zeta^2} Q \frac{\zeta^2}{\zeta} Q \frac{s\gamma}{\zeta^2} Q \frac{\zeta^2}{\zeta} \dots \right] \quad (410)$$

Die Grenzbedingung lautet

$$1 - 4\varepsilon Q \frac{\zeta^2}{\zeta} Q \frac{s\gamma}{\zeta^2} Q \frac{\zeta^2}{\zeta} + 16\varepsilon^2 Q \frac{\zeta^2}{\zeta} \dots = 0 \quad (411)$$

Die hieraus resultierende Gleichung für ε lautet

$$1 - 0,4518\varepsilon + 0,1014\varepsilon^2 - 0,019\varepsilon^3 + 0,005\varepsilon^4 \dots = 0 \quad (412)$$

Die kleinste Lösung, die aber noch nicht untersucht wurde, liegt über $\varepsilon = 2$. In unserem Falle ist $\varepsilon = 0,945$. Man sieht also, daß die Erde im Falle eines flüssigen Erdkernes stabil ist, wenn nur k genügend groß ist. Für eine inkompressible Erde wäre $k = \infty$ und nach (406) $\varepsilon = 0$, aber auch die von uns untersuchte Kugel wäre stabil. Daß die Änderung der verschiedenen Größen mit der Tiefe das Ergebnis wesentlich beeinflussen würden, ist unwahrscheinlich, und wir finden also, daß die Stabilität der Erde mit einem Erdkern mit verschwindender Richtigkeit, also einem Erdkern mit elastischen Eigenschaften einer Flüssigkeit, durchaus verträglich ist.

Kapitel 16

Die Kompressibilität der Erde

§ 174. Allgemeines über Kompressibilität. Als Definitionsgleichung für den Inkompressibilitätsfaktor k hatten wir die Beziehung (93) S. 445

$$\Delta p = -k\Theta, \quad \text{wo } \Theta = \Delta v : v, \quad \text{also ist} \\ k = - \frac{\Delta p}{\Delta v} v \quad (413)$$

wo Δv die Änderung des Volumens v ist, die durch eine Druckänderung Δp (wir hatten ursprünglich hierfür p geschrieben) hervorgerufen wird. k gibt also an, wie groß der Druck ist, der angewandt werden muß, um ein bestimmtes Volumen v einer Substanz um einen bestimmten Betrag Δv zu komprimieren. Je größer dieser Druck ist, der dem bereits vorhandenen hinzugefügt werden muß, je weniger leicht der Körper also Druckänderungen nachgibt, desto größer ist k , je kompressibler der Körper ist, desto kleiner ist k . Es empfiehlt sich hier nach nicht, k als „Kompressibilitätsfaktor“ zu bezeichnen, sondern der Ausdruck „Inkompressibilitätsfaktor“ ist besser (englisch: bulk modulus). Außer dem Wert k wird auch manchmal $C = 1 : k$ benutzt, C ist dann der „Kompressionsmodul“.

§ 175. Bestimmung des Inkompressibilitätsfaktors k im Laboratorium. Die Methoden zur Bestimmung von k beruhen im allgemeinen darauf, daß man einen Hohlzylinder des zu untersuchenden Materials herstellt, diesen mit einer Flüssigkeit füllt, die oben nur durch eine Kapillare austreten kann, dann den Zylinder komprimiert und das Steigen der Flüssigkeit in der Kapillaren beobachtet.

Bei Anwendung hoher Drucke¹⁾ müssen die Versuchskörper in dickwandige Stahlbomben eingeschlossen werden.

§ 176. Beobachtungen über k . Einfluß von Druck und Temperatur. Die eingehendsten Untersuchungen über den Inkompressibilitätsfaktor von Gesteinen, der uns hier am meisten interessiert, rühren von ADAMS und WILLIAMSON (a. a. O.) her. Ihren Angaben sind die Tabellen 56 bis 59 entnommen. Tabelle 60 enthält die Werte für Quarz im kristallinen und glasigen Zustand nach SOSMAN²⁾.

Tabelle 56
Inkompressibilitätsfaktor k für Mineralien nach ADAMS, WILLIAMSON und (in einigen Fällen) JONSTON. Alle Werte sind mit 10^{11} zu multiplizieren

Mineral	Zusammensetzung	k bei Druck von etwa		
		0 Atm.	2000 Atm.	10000 Atm.
Oligoklas . . .	Ab ₇₈ An ₂₂	5,7	5,8	6,3
Labradorit . .	Ab ₄₈ An ₅₂	6,4	6,6	7,5
Mikroklin . .	Or ₉₁ Al ₉	5,2	5,3	6,0
Enstatit . . .	(Mg Si O ₃) ₈₈ (Fe Si O ₃) ₁₂	9,7	9,7	9,7
Diopsid . . .	Ca O. Mg O. 2 Si O ₂ . .	9,2	9,2	9,2
Augit	—	9,6	9,6	9,6
Actinolit . . .	—	7,6	7,6	7,6
Phlogopit . .	—	4,3	4,4	5,0
Pyrit	Te S ₂	14,1	14,1	14,1
Diamant . . .	C	5,5	5,5	5,5
Quarz	Si O ₂	3,7	3,8	4,3
Quarzglas . .	Si O ₂	3,2	3,2	?
Calcit	Ca CO ₃	7,2	7,2	7,2
Halit	Na Cl	2,4	2,5	2,8

Tabelle 57
 k für Gesteine, die durch eine dünne Metallhülle isoliert waren. Nach ADAMS und WILLIAMSON. Alle Werte sind mit 10^{11} zu multiplizieren

Gestein	k bei Druck von etwa	
	2000 Atm.	10000 Atm.
Marmor	7,2	7,2
Sudbury Diabas . . .	7,3	8,2
Palisade Diabas . . .	5,5	7,7
Basalt	4,1	5,9
Gabbro	7,4	8,7
Westerly Granit . . .	5,0	5,3
Stone-Mt. Granit . .	5,0	5,5
Washington Granit .	4,4	5,6
Obsidian	3,5	3,5
Serpentin	5,6	7,2

¹⁾ Vgl. z. B. ADAMS und WILLIAMSON, Journ. of the Franklin Inst., 195, 475, 1923.

²⁾ Papers from the Geophysical Laboratory, Washington, Nr. 691, 1929, mit umfangreichen Literaturangaben.

Tabelle 58

k für Gesteine, berechnet aus den Bestandteilen.
Nach ADAMS und WILLIAMSON. Alle Werte sind mit 10^{11} zu multiplizieren

Gestein	Vorausgesetzte Zusammensetzung (Volumprozent)										k bei einem Druck von etwa	
	Quarz	Orthoklas	Andesit	Labradorit	Biotit	Amphibol	Augit	Hypersten	Olivin	Eisen	2000 Atm.	10 000 Atm.
Granit	30	65			5						4,7	5,3
Syenit		90			5	5					5,3	5,9
Granodiorit. . . .	11	20	52		10	7					5,5	6,0
Diorit			80		5	15					6,2	6,7
Gabbro.				50			40	10			8,3	8,5
Pyroxenit							50	50			?	9,7
Peridotit								50	50		?	10,3
Dunit									100		?	10,8
Pallasit.									50	50	?	13
Siderit										100	?	17

Tabelle 59

Inkomprissibilitätsfaktor k für Diabasa a) beobachtet; b) aus den Bestandteilen berechnet, nach ADAMS und GIBSON¹⁾.
Alle Werte in Dyn/cm² und mit 10^{11} zu multiplizieren

Fundort	Bei 2000 Atm. Druck	Bei 10 000 Atm. Druck	
	beobachtet	beobachtet	berechnet
Whin Sill	5,9	7,9	8,5
Sudbury.	7,3	8,0	8,6
Palisade.	6,5	7,7	8,6
Maryland	8,1	9,3	9,3
Plateaubasalt Mittel .	—	—	8,8

Tabelle 60

Inkompressibilitätsfaktor für amorphen und kristallinen Quarz.
Nach SOSMAN. Alle Zahlen in Dyn/cm² und mit 10^{11} zu multiplizieren

Druck Atm.	0	2000	4000	6000	8000	10 000	12 000
k für Quarzkristall . . .	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1
k für Quarzglas	3,7	3,7	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4

Quarzglas würde hiernach im Gegensatz zu den kristallinen Mineralien mit zunehmendem allseitigen Druck immer kompressibler. Im übrigen differieren wie im Falle des Righheitsfaktors so auch hier die Werte für verschiedene Stücke des gleichen Materials erheblich. Wie man aus den Tabellen und noch deutlicher

¹⁾ Proc. of the National Academy of Sciences, 15, 713, 1929.

aus Figur 165 ersieht, ist die Differenz der Werte im allgemeinen für kompaktes Material kleiner als für lockeres, und nimmt im letzten Fall mit wachsendem Druck erheblich ab. ADAMS und WILLIAMSON schlossen zweifellos mit Recht, daß die starke Zunahme des Inkompressibilitätsfaktors bei steigendem Druck für kleine allseitige Drucke dadurch in erster Linie bedingt sei, daß sich die Poren des betreffenden Körpers schließen. Erst bei höheren Manteldrucken wäre dann der Zuwachs von k durch innere Vorgänge in dem betreffenden Material (engere Lagerung der Moleküle) bedingt.

Die Untersuchungen zeigen jedenfalls, wie wir sahen, daß k mit steigendem Druck zunimmt. Dabei sei zur Vermeidung von Irrtümern darauf hingewiesen, daß wir hier unter „steigendem Druck“ nicht verstehen wollen, daß wir nun eine größere Druckdifferenz zur Bestimmung von k anwenden, sondern daß k

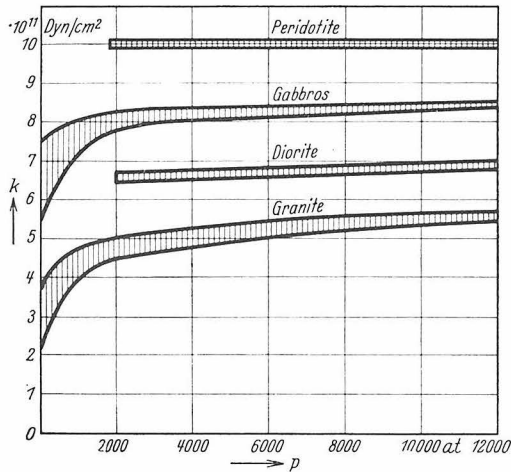


Fig. 165
Inkompressibilitätsfaktor k als Funktion des Druckes nach ADAMS und WILLIAMSON. Die schraffierten Gebiete geben die Wertbereiche für verschiedene Stücke der betr. Gesteine

durch Verwendung der gleichen (möglichst kleinen) Druckstufen, aber ausgehend von immer höheren Anfangsdrucken bestimmt wurde.

Die Untersuchungen ergaben übrigens nicht immer den glatten Verlauf, wie er durch Fig. 165 für mehrere Substanzen dargestellt wird. So wies z. B. BRIDGMAN darauf hin, daß bei gewissen Drucken, die nur wenig von der Temperatur abhängig sind, die Kompressibilität des Wassers schneller abnimmt als bei größeren und kleineren Drucken. Der Grund liegt vermutlich in Umwandlungen der Molekülarart. Wir finden jedenfalls hier einen Hinweis, daß auch innerhalb des Bereiches des nichtkristallinen Zustandes eines Stoffes unstetige Übergänge möglich sind. Eine Ausnahme von dem regelmäßigen Verhalten macht ferner Quarz, bei dem P. W. BRIDGMAN¹⁾ bei Drucken zwischen 8000 und 12000 kg/cm² keine merkliche Änderung, vorübergehend sogar Zunahme der Kompressibilität fand. Seine Messungen ergaben:

p	2000	4000	6000	8000	10000	12000 kg/cm ²
$\Delta v: v_0$ bei 30°	0,00553	0,01078	0,01565	0,02025	0,02468	0,02945
$\Delta v: v_0$ bei 75°	0,00558	0,01081	0,01571	0,02040	0,02503	0,02970

Wenn wir hieraus k nach Gleichung (413) berechnen, so müssen wir berücksichtigen, daß der Druck von 1 kg Gewicht gleich 981000 Dyn ist (1 Dyn ist die Einheit der Kraft im Zentimeter-Gramm-Sekunden-System). Es ergibt sich für

¹⁾ Sill. Journ. (5), 10, 483, 1925.

	0	2000	4000	6000	8000	10000
p	— 2000	— 4000	— 6000	— 8000	— 10000	— 12000 kg/cm^2
k bei 30°	3,56	3,73	4,02	4,26	4,25	$4,27 \times 10^{11} \text{ CGS}$
k bei 75°	3,51	3,74	4,00	4,18	4,24	$4,20 \times 10^{11} \text{ CGS}$

Diese Angaben sollen hauptsächlich zur Erläuterung dienen, denn bei genauer Bestimmung müßten die Intervalle Δp , die hier 2000 kg/cm^2 betragen, viel kleiner gewählt werden. Im übrigen ergeben sich bei allen Kristallen in den

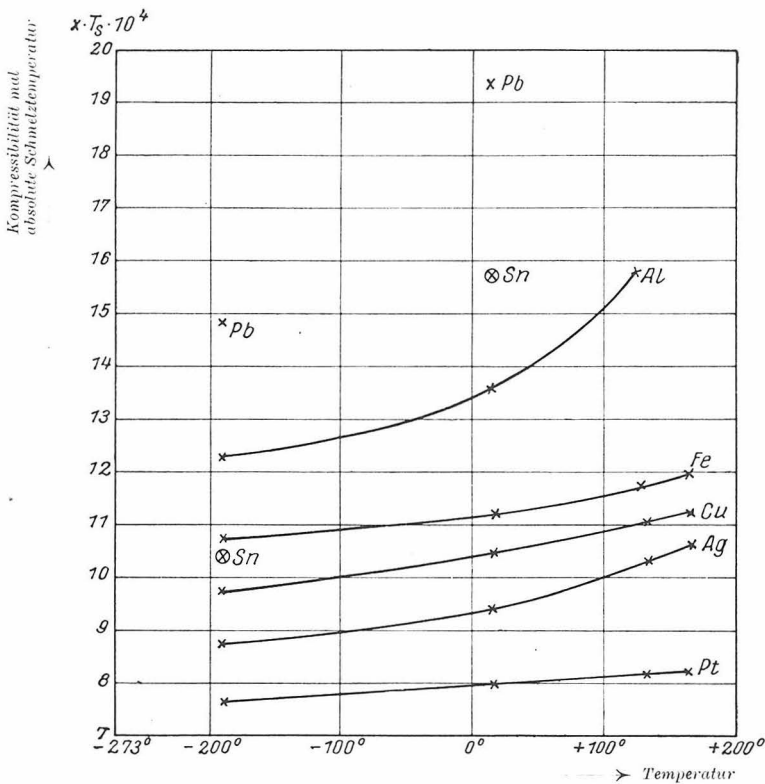


Fig. 166
Einfluß der Temperatur auf die Kompressibilität nach GRÜNEISEN.
Aus AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 3

verschiedenen Achsenrichtungen recht erhebliche Unterschiede bei der linearen Kompressibilität $\Delta l:l_0$. Diese ist bei Quarz bei einer Temperatur von 30°

für $p =$	2000	4000	6000	8000	10000	12000 kg/cm^2
senkrecht						
zur c -Achse	0,00204	0,00397	0,00574	0,00743	0,00913	0,01084
parallel						
zur c -Achse	0,00144	0,00281	0,00409	0,00528	0,00640	0,00748

Doch kommen für uns die Unterschiede weniger in Betracht als die großen Differenzen zwischen verschiedenen Proben der gleichen Gesteinsart.

L. H. ADAMS fand¹⁾, daß die Änderung des Kompressibilitätsfaktors C durch den Druck im allgemeinen um so größer ist, je größer C ist. Für Substanzen mit sehr großer Kompressibilität, also kleinem Inkompressibilitätsfaktor, ist dessen Änderung bei Druckänderung von 1 auf 10000 Atmosphären etwa $0,3 \cdot 10^{11}$ CGS.

Im allgemeinen sind die Gesteine um so kompressibler, je basischer sie sind, wie die Tabellen zeigen.

Über den Einfluß der Temperatur auf die Kompressibilität liegen nur wenig Untersuchungen vor. Nach Untersuchungen von BRIDGMAN²⁾ erhöht steigende Temperatur die Kompressibilität. Zu gleichen Ergebnissen führten auch die übrigen Untersuchungen³⁾. In Fig. 166 ist für einige Metalle das Produkt

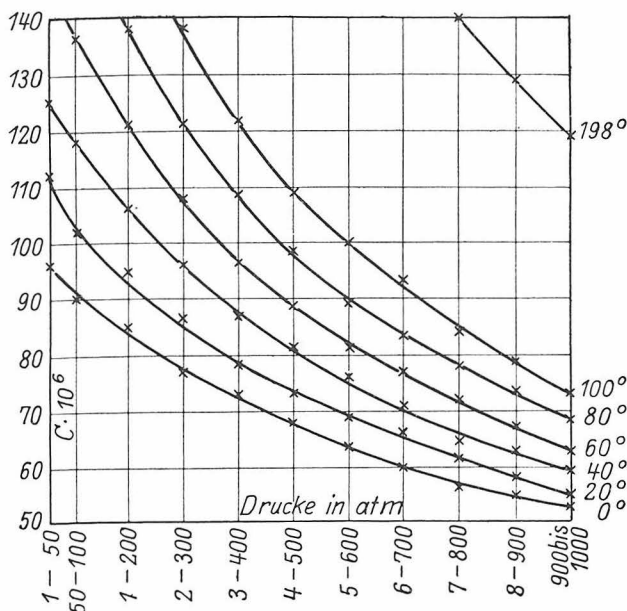


Fig. 167

Kompressibilität C von Alkohol bei verschiedenen Drucken und Temperaturen nach AMAGAT.

Aus AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 5

Kompressibilitätsfaktor C mal absolute Schmelztemperatur S nach GRÜNEISEN⁴⁾ eingetragen. Man erkennt, daß die Kompressibilität schneller zunimmt als die Temperatur, also k entsprechend abnimmt.

Für Flüssigkeiten liegt eine größere Reihe von Untersuchungen vor⁵⁾. In Tabelle 61 ist eine Reihe von Werten zusammengestellt, weiter zeigt Fig. 167, daß Druck und Temperatur ähnlich wirken wie bei festen Körpern. Auf Abweichungen bei Wasser wurde schon oben verwiesen. Es besitzt überdies ein

¹⁾ Journ. of the Washington Academy of Sciences, 17, 529, 1927.

²⁾ Proc. Amer. Soc., 58, 207, 1923.

³⁾ Vgl. z. B. AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 3, S. 117, Leipzig, 1927.

⁴⁾ Annalen der Physik, 33, 1239, 1910.

⁵⁾ Vgl. z. B. AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 5, S. 7, Leipzig 1927.

Minimum der Kompressibilität bei etwa 50° C. Erwähnenswert ist noch, daß k für Eis zu $\frac{1}{2}-\frac{3}{4} \cdot 10^{11}$ und von Wasser von 0° zu $\frac{1}{2} \cdot 10^{11}$, also etwa gleich groß gefunden wurde, und daß der Wert für Quecksilber von der gleichen Größenordnung ist wie bei Gesteinen.

Tabelle 61
Inkompressibilitätsfaktor von Flüssigkeiten
(alle Werte sind mit 10^{11} zu
multiplizieren) in CGS

Flüssigkeit	Temperatur	k
Äther	10°	0,06
Alkohol	10°	0,11
Glyzerin	20°	0,42
Olivenöl	20°	0,17
Paraffin	10°	(0,05)
Quecksilber	10°	2,6
Wasser	20°	0,22

§ 177. Inkompressibilitätsfaktor und die Geschwindigkeit von Longitudinalwellen. Gleichung (139) S. 454 liefert eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit V von Longitudinalwellen, \mathfrak{B} von Transversalwellen, dem Inkompressibilitätsfaktor k und dem Righetskoeffizienten μ sowie der Dichte ρ :

$$k = \rho V^2 - \frac{4}{3} \mu = \rho \left(V^2 - \frac{4}{3} \mathfrak{B}^2 \right) \quad (414)$$

Diese Beziehung gilt unter den gleichen Voraussetzungen wie (138) S. 454. Eine andere Frage ist jedoch, ob die statisch bestimmten Werte für k mit den nach (413) dynamisch gewonnenen identisch sind. R. A. DALY¹⁾ sprach die Vermutung aus, daß letztere infolge der geringeren Drucke, die dabei wirken, größer sind als erstere. Die vorliegenden Beobachtungen lassen bisher keinen Unterschied erkennen, der größer ist als die Beobachtungsfehler. MAURIN und EBLÉ²⁾ fanden bei künstlich erzeugten elastischen Wellen in Kreidekalk eine Geschwindigkeit der Longitudinalwellen von 2,14 km/sec, während sich aus den Messungen der Dichte und des Elastizitätsmoduls im Laboratorium 2,16 km/sec ergab, also praktisch der gleiche Wert. Größer sind die Unterschiede bei Eis³⁾. Hier ergaben die Messungen die in Tabelle 62 angegebenen Geschwindigkeiten V für Longitudinalwellen und \mathfrak{B} für Transversalwellen.

Aus $V = 3,4$ km/sec und einer Dichte von 0,9 ergibt sich $k = 7,33 \cdot 10^{10}$ Dyn/cm², während nach BRIDGMAN nach Laboratoriumsuntersuchungen mit der statischen Methode etwa $k = 6 \cdot 10^{10}$ Dyn/cm² wäre.

Sprengungen bei La Courtine ergaben für die Wellenfortpflanzung in Granit und Gneis zwischen 5,5 und 6,2 km/sec. Im ersten Falle wäre $k = 4,2 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm². Laboratoriumsuntersuchungen an solchen Gesteinen ergaben im Mittel $k = 3 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm². In den beiden letzten Fällen liegen also die statisch bestimmten Werte für k merklich unter den dynamisch gefundenen, doch wurde bei den verschiedenartigen Messungen nicht das gleiche Material benutzt.

¹⁾ Gerlands Beitr. z. Geophysik, 19, 198, 1928; 22, 29, 1929; Amer. Journ. of Sciences, 15, 122, 1928.

²⁾ Annales de l'Institut de Physique du Globe, 4, 141; Comptes rend. Paris, 181, 1077, 1925, Nr. 25.

³⁾ Vgl. auch R. A. DALY, Nature of certain Discontinuities in Earth. Vortrag, Washington, 1929.

Tabelle 62
Wellengeschwindigkeit V longitudinal und \mathfrak{S} transversal in Eis

Hintereisferner nach MOTHES	$V = 3,60$ km/sec	$\mathfrak{S} = 1,69$ km/sec
Aletschgletscher nach MOTHES	$V = 3,57$ „	$\mathfrak{S} = 1,67$ „
Desgl. Firneis nach MOTHES	$V = 3,14$ „	$\mathfrak{S} = 1,35$ „
Grönland Messung 2—6 nach SORGE . . .	$V = 3,49$ „	$\mathfrak{S} = 1,69$ „
„ „ 10—11 „ „ . . .	$V = 3,41$ „	$\mathfrak{S} = 1,68$ „
„ „ 14,15 „ „ . . .	$V = 3,70$ „	$\mathfrak{S} = 1,82$ „
„ „ 20,21 „ „ . . .	$V = 3,47$ „	$\mathfrak{S} = 1,70$ „
(Firn, darunter vermutlich Eis)		

In diesem Zusammenhange sei anderseits auf die Untersuchungen von M. PICHOT¹⁾ verwiesen, der bei mehreren Gesteinen dynamisch und statisch den gleichen Elastizitätsmodul fand, solange er nicht allzu hohe Drucke verwandte. Abweichungen bei der statischen Bestimmung können durch nichtelastische Deformationen vorgetäuscht werden. Jedenfalls sind weitere Untersuchungen zur Klärung dieser von DALY angeschnittenen Frage notwendig.

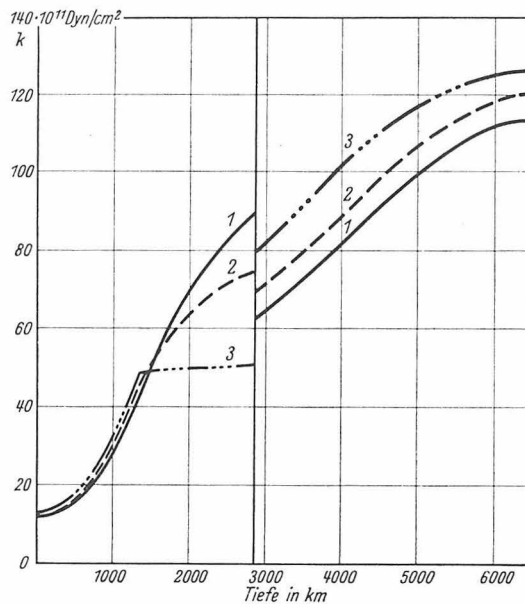


Fig. 168

Inkompressibilitätsfaktor k im Erdinnern auf Grund der Ergebnisse über die Geschwindigkeit der Erdbenenwellen unter den Annahmen A_1 (1), B_1 (2) und D_2 (3) der Tabelle 46 S. 463 über die Dichte. Im Erdkern ist die Richtigkeit zu Null angenommen

§ 178. Die Kompressibilität im Erdinnern. Ergebnisse über die Kompressibilität im Erdinnern waren bisher nur aus den Erdbenenwellengeschwindigkeiten nach (414) zu erhalten. Analog wie dies S. 477 für die Richtigkeit geschehen ist, sind in Tabelle 63 die Inkompressibilitätsfaktoren k für verschiedene Teile der Erdkruste und in Fig. 168 die Werte für das Erdinnere gegeben, die auf diese Weise

¹⁾ Journal de Physique et de Radium, 8, 42, 1927.

gewonnen worden sind. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Transversalwellen im Erdkern Null ist. Andernfalls sind die Werte für k dort etwas geringer, und zwar wäre k zwischen $4 \cdot 10^{12}$ und $8 \cdot 10^{12}$ Dyn/cm², wenn die Poisson'sche Konstante im Kern $\frac{1}{4}$ ist.

Tabelle 63
Inkompressibilitätsfaktor k in verschiedenen Teilen
der Erdkruste in Dyn/cm² nach Gleichung (414). Alle
Zahlen sind mit 10^{11} zu multiplizieren

Tiefe in km:	3	25	50
Norddeutschland	6	8½	12
Süddeutschland	5	8	12
England	4	6	12
Japan	4	6	12
Atlantischer Ozean	(6)	11	12
Pazifischer Ozean	(8)	11	12

Kapitel 17

Die POISSON'sche Konstante
und der Elastizitätsmodul im Erdinnern

§ 179. Allgemeines über die Poisson'sche Konstante. Die Poisson'sche Konstante σ , das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bei einem gedehnten Stabe, ist nach (98) gegeben durch

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{\mu}{k}}{2 + \frac{2}{3} \frac{\mu}{k}} \dots \dots \dots (415)$$

Tabelle 64
Aus Laboratoriumsbeobachtungen gewonnene Werte für die
Poisson'sche Konstante σ (Mittelwerte)

Material	σ	Material	σ
Aluminium	0,35	Flußpat	0,22
Blei	0,42	Lithographenstein	0,25
Eisen	0,28	Baryt	0,28
Gold	0,42	Feuerstein	0,08
Kupfer	0,34	Obsidian	0,18
Nickel	0,32	Baveno-Granit	0,27
Platin	0,30	Peterhead-Granit	0,21
Stahl	0,29	Anorthosit	0,26
Kautschuk	0,47	Gabbro	0,22
Kork	0,00	Sudbury-Diabas	0,28
Paraffin	0,50	Ohio-Sandstein	0,26

Material	Grenzwerte	Mittelwert
Verschiedene Marmorarten . .	0,25—0,28	0,26
Verschiedene Granite	0,20—0,26	0,22
Verschiedene Eruptiva	0,22—0,28	0,26

Tabelle 64 enthält eine Reihe von beobachteten Werten. Für Flüssigkeiten ($\mu = 0$) wird $\sigma = \frac{1}{2}$, für undeformierbare Körper mit merklicher Kompressibilität wird $\mu = \infty$, also $\sigma = 0$. Für kristalline Körper ist im allgemeinen etwa $\lambda = \mu$, also $\sigma = \frac{1}{4}$, doch gilt dies nicht regelmäßig und auch nicht genau.

Der Einfluß des Druckes auf die Poissonsche Konstante scheint noch nicht untersucht worden zu sein. Auch über den Einfluß der Temperatur liegen nur

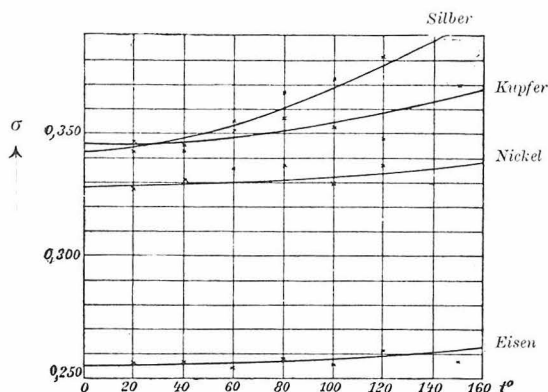


Fig. 169

Die Poissonsche Konstante σ als Funktion der Temperatur nach Bock.

Aus AUERBACH-HORT, Handbuch der Physik, Band 3

sehr spärliche Beobachtungen vor, die meist eine geringe Zunahme von σ bei Erwärmung ergaben (Fig. 169), vereinzelt gar keine Änderung erkennen ließen.

§ 180. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern. Die Poissonsche Konstante σ ergibt sich direkt aus den beobachteten Werten für die Geschwindigkeit V der Longitudinalwellen und \mathfrak{V} der Transversalwellen nach (140)

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left[\left(\frac{V}{\mathfrak{V}} \right)^2 - 1 \right]} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{V}{\mathfrak{V}} \right)^2 - 1}{\left(\frac{V}{\mathfrak{V}} \right)^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{V^2 - \mathfrak{V}^2}{V^2 - \mathfrak{V}^2} \quad (416)$$

In Tabelle 65 sind einige Werte für σ in der Erdkruste nach dieser Beziehung berechnet worden. Für die Tiefen zwischen 50 und 2900 km ergibt die Rechnung Werte zwischen 0,26 und 0,29. Man wird hiernach ohne großen Fehler für die Erde bis zu 2900 km Tiefe als *Mittelwert* 0,27 einsetzen dürfen. Die Abweichungen von dieser Zahl liegen jedenfalls innerhalb der Beobachtungsfehler. Für Eis wäre nach Tabelle 62 etwa $\sigma = 0,36$. Unterhalb 2900 km Tiefe wäre σ nach unseren

Ergebnissen über die Righeit nahe an 0,5. Für $\sigma = 0,27$ lauten die Gleichungen (135)ff. S. 454:

$$E = 0,8 \varrho V^2 = 2,54 \varrho \mathfrak{B}^2 = 2,54 \mu = 1,4 k \quad V : \mathfrak{B} = 1,78 \quad \mu = 0,54 k \quad (417)$$

Tabelle 65

Die Poisson'sche Konstante σ in der Erdkruste

Tiefe in km	3	25
Norddeutschland . . .	0,30	0,31
Süddeutschland	0,25	0,30
England	0,21	0,22
Japan	0,22	0,21

§ 181. Allgemeines über den Elastizitätsmodul. Wie schon erwähnt wurde, hat der Elastizitätsmodul E keine große Bedeutung für die Erforschung des Aufbaues der Erde gewonnen, ja, er scheint bisher nicht einmal für die verschiedenen Tiefen berechnet worden zu sein. Da er jedoch am besten von den verschiedenen elastischen Konstanten im Laboratorium bestimmt worden zu sein scheint, sei kurz auf ihn eingegangen. Er gibt die Zugkraft an, welche an dem einen Ende eines am anderen Ende befestigten Zylinders angebracht werden muß, um dessen Länge zu verdoppeln, unter der Voraussetzung, daß die Längenänderung des Zylinders ohne Rücksicht auf die Größe der Zugkraft dieser proportional ist. Diese Bedingung (HOOKE'Sches Gesetz) gilt allerdings nur für kleine Zugkräfte. In Tabelle 66 ist eine Reihe von Werten für den Elastizitätsmodul von Gesteinen auszugsweise aus Band 6 des Handbuches wiedergegeben; am Schlusse sind einige Werte für andere Substanzen beigelegt. Die Werte schwanken aus den schon bei den andern Moduln angegebenen Gründen zum Teil erheblich. Wo in der Tabelle nur ein Wert angegeben ist, handelt es sich im allgemeinen entweder um einen Mittelwert, oder es lag nur eine Beobachtung für den betreffenden Stoff vor. Neuere Werte nach A. GASTAN¹⁾ sind in Tabelle 67 zusammengestellt, während Tabelle 68 Messungsergebnisse von H. BREYER²⁾ enthält.

Tabelle 66

Elastizitätsmodul E für Gesteine (meist nach Zusammenstellung von H. REICH) und einige andere Substanzen in Dyn/cm².
Alle Zahlen sind mit 10¹¹ zu multiplizieren

a) Tiefengesteine (Eruptiva)		b) Ergußgesteine		c) Sedimente	
Granit	3 ¹ / ₂ —7 ¹ / ₂	Basalt. . .	5 ¹ / ₂ —10	Sandstein . . .	0,8—1,6
Nephelin-Syenit	6,3	Basalt-Glas	9—9 ¹ / ₂	Quarzit	7,3
Anorthosit . .	8,3	Diabas . .	7 ¹ / ₂ —11 ¹ / ₂	Grauwacke. . .	7,6
Gabbro	6 ¹ / ₂ —12	Rhyolith . .	2,0	Kreide	0,8
Peridotit . . .	6	Andesit . .	3,2	Kalk, kreidig. .	1,9
Pyroxenit . . .	8,3	Obsidian . .	4,8	„ feinkörnig	4,3
Dunit	17	Pechstein . .	5,5	„ kristallin .	6

¹⁾ Publ. du Bureau Central Seismol. Sér. A, fasc. 6, S. 80, Paris 1929.

²⁾ Über die Elastizität von Gesteinen, Beiträge zur physikalischen Erforschung der Erdrinde, Heft 1, Geol. Landesanstalt, Berlin 1929. — Zeitschrift für Geophysik, 6, 98, 1930.

	parallel zur Schieferung bzw. zur Hauptachse	senkrecht dazu
Gneis	3,5	1,3
Tonschiefer	8,4	3,7
Quarz	10,1	7,7

Eisen, Stahl	18—22	Glas meist	7—8	Paraffin	0,17
Platin	16—17	Korund	52	Wachs	0,05
Nickel	20—24	Iridium	52	Gelatine	0,00002

Tabelle 67

Elastizitätsmodul E nach GASTAN. E wurde aus der Berührungsfläche beim Auffallen einer Stahlkugel auf eine berußte Fläche des zu untersuchenden Materials bestimmt

Gestein	Dichte	E Dyn/cm ²	Granit von:	Dichte	E Dyn/cm ²
Italienischer Marmor . .	2,70	$2,78 \cdot 10^{11}$	Andlau I . .	2,67	$6,88 \cdot 10^{11}$
Marmor von Hauteville .	2,71	3,33	„ II . .	2,64	7,09
„ „ Hydraquent	2,70	3,31	Raon	2,70	7,14
Trapp von Raon	2,86	6,44	Eichoffen I .	2,66	6,78
„ „ Andlau	2,71	5,68	„ II . .	2,64	6,43
Porphyr von St. Michel .	2,41	15,8	Cornimont . .	2,67	5,99
			Kragenfels . .	2,58	8,85
			Mittel		$7,0 \cdot 10^{11}$

Tabelle 68

Elastizitätsmodul E , Kieselsäuregehalt K in %, Porenvolumen Po in % und Gefüge von Gesteinen aus Deutschland nach BREYER

Gestein und Herkunft	E in Dyn/cm ²	K in %	Po in %	Gefüge
Granit, Jannowitz	$4,15 \cdot 10^{11}$	76	0,2	mittelkörnig
„ Dresden	4,35	66	0,2	„
Syenit, Dresden	6,71	61	0,2	„
„ Freital	6,78	61	0,2	„
„ Riesa	8,63	52	0,2	mittel-grob
Gabbro, Neurode	9,14	52	0,4	ziemlich grob
„ Harzburg	9,60	49	0,1	sehr fein
Diabas, Neuwerk	7,93	44	0,2	ziemlich grob
„ Niederkunnersdorf . .	8,72	50	0,04	verh. grob
Basaltlava, Hanneb. Ley . .	3,56	40	5,7	feinkristallin
Melaphyr, Ingenhöhl. . . .	5,34	55	0,3	stark umgewandelt
Basalt, Ostritz	11,15	42	0,3	sehr glasreich
Andesit, Wolkenburg	2,74	62	1,4	grob porphyrisch
Porphy, Löbejün	3,58	71	1,3	„ „
Sandstein, Hamm	3,53	97	0,8	ziemlich fein

Figur 170 zeigt die Ergebnisse für E in kg/cm^2 bei wachsenden Spannungen, die Werte sind verhältnismäßig konstant. Bei kleinen Spannungen fand TROMAN¹⁾ bei Metallen ein Maximum für E , bei weiterer Abnahme der Belastung wieder Abnahme von E . Tabelle 69 gibt schließlich einige Mittelwerte.

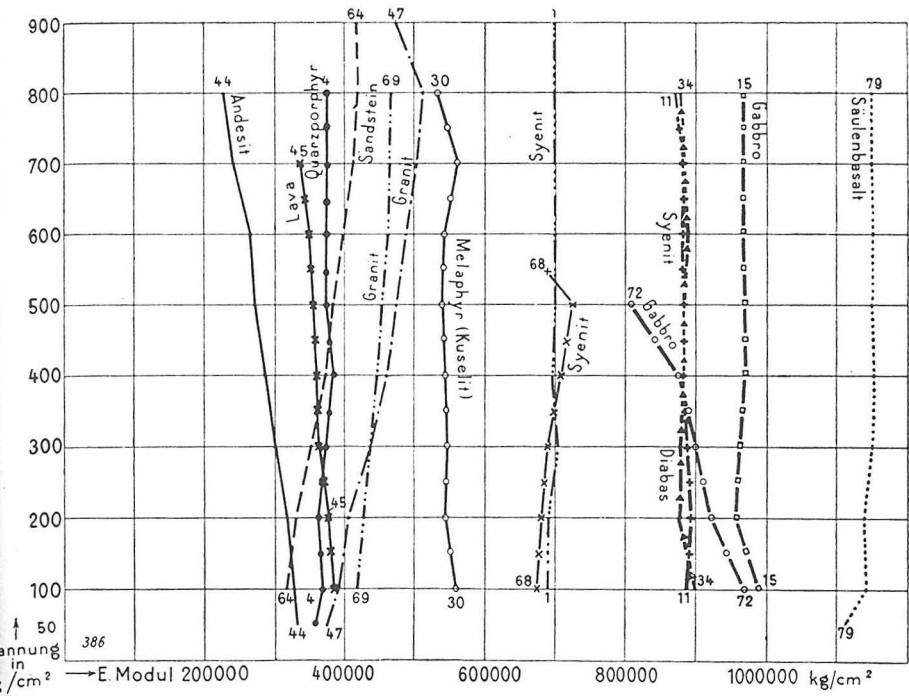


Fig. 170
Elastizitätsmoduln von Gesteinen nach BREYER.
(Aus Zeitschr. für Geophysik, 6, 102, 1930)

Tabelle 69
Elastizitätsmodul E nach verschiedenen Autoren (Mittel). a) ADAMS und COKER, b) ADAMS und WILLIAMSON, c) GASTAN, d) BREYER.
Alle Werte in Dyn/cm^2 sind mit 10^{11} zu multiplizieren

Material	E in $\text{Dyn/cm}^2 \cdot 10^{-11}$			
	a	b	c	d
Sandstein	1,6	—	—	3,5
Granit	4,6—5,7	6—7	7,0	4,1—4,4
Syenit	6,3	—	—	6,7—8,6
Basalt	—	5,7—8	—	(11)
Gabbro	10,8	10,2—11	—	9,1—9,6

Bei zunehmender Temperatur nimmt E stark ab, wie Fig. 171 zeigt.

¹⁾ Phys. Rev. 35, Nr. 3, 264, 1930.

§ 182. Der Elastizitätsmodul im Erdinnern. Analog wie dies in § 162 bzw. § 177 für μ und k geschehen ist, können wir nun auch E aus den Geschwindigkeiten der Erdbebenwellen V und \mathfrak{B} sowie der Dichte ρ berechnen, und zwar ist nach (142)

$$E = 3 \rho \frac{V^2 - 2 \mathfrak{B}^2}{\left(\frac{V}{\mathfrak{B}}\right)^2 - 1} = 2 \rho \mathfrak{B}^2 (1 + \sigma) \dots \dots \dots (418)$$

Für die Poissonsche Konstante im Erdinnern bis zum Erdkern fanden wir angenähert konstant $\sigma = 0,27$, wir haben also dort angenähert

$$E = 2,54 \rho \mathfrak{B}^2 \dots \dots \dots (419)$$

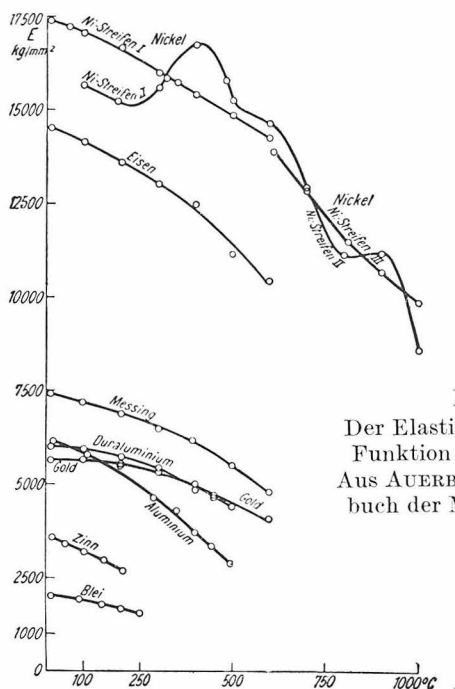


Fig. 171
Der Elastizitätsmodul E als
Funktion der Temperatur.
Aus AUERBACH-HORT, Hand-
buch der Mechanik, Band 3

In Tabelle 70 sind die Ergebnisse für einige Teile der Erdkruste nach (418) zusammengestellt, Tabelle 71 gibt Werte vom E bis zum Erdkern, wo E vermutlich fast auf 0 sinkt.

Tabelle 70
Elastizitätsmodul E in der Erdkruste
in Dyn/cm²

Tiefe in km	3	25
Norddeutschland	$7,2 \cdot 10^{11}$	$9,1 \cdot 10^{11}$
Süddeutschland	7,2	9,1
England	7,1	9,7
Japan	6,9	9,7

Tabelle 71
Elastizitätsmodul E in Dyn/cm² im Erdinnern

Tiefe in km	50	500	1000	1300	2000	2900
E etwa	1,55	2 $\frac{1}{2}$	4	5	9	10
			alles mal 10 ¹²			

Der Wert in 3 km Tiefe entspricht einigen Werten für Granit (Tabelle 69), während in 25 km Tiefe E von der gleichen Größenordnung ist wie bei Basalt an der Erdoberfläche (Tabelle 69). Andererseits ist es erstaunlich, daß die Unterschiede in den einzelnen Gebieten viel kleiner sind, als man nach den Tabellen 66 bis 69 erwarten sollte. Offenbar ist schon in wenigen Kilometern Tiefe das Material in allen Kontinenten viel gleichartiger als an der Oberfläche.

Die Werte von E unterhalb 45 km Tiefe, $15 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² und mehr, werden gerade noch ausnahmsweise selbst unter hohen Drucken im Laboratorium gefunden. Es handelt sich dabei entweder um Basalte oder Gabbros oder Dunit. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß bei den dort herrschenden Temperaturen die Werte für E merklich kleiner sein müssen als bei sonst gleichen Umständen bei Zimmertemperatur (vgl. Fig. 171).

Kapitel 18

Die Viskosität und die innere Reibung im Erdinnern

§ 183. Allgemeines über Viskosität und innere Reibung. Ist ein Körper einer Spannung ausgesetzt, so deformiert er sich. Diese Deformation kann auf verschiedene Weisen vor sich gehen: Im idealen Falle treten in dem Körper sofort die endgültigen Deformationen (Volumen- und Formveränderungen) auf, die neue Lagerung der Moleküle bleibt ungeändert, solange die Spannung ungeändert bleibt, der Körper nimmt seine ursprüngliche Form wieder an, sobald die störende Spannung aufhört. Dabei kommt es allerdings vor, daß der Körper nicht *sofort* völlig in den Ruhezustand zurückkehrt. Bei diesem ganzen Vorgange folgen die Veränderungen den seither von uns benutzten Beziehungen für elastische Deformationen.

In einer Reihe von Fällen nimmt der Körper die deformierte Form nicht plötzlich, sondern erst nach und nach ein; die „innere Reibung“ erschwert die Deformation. Ebenso erfolgt die Rückkehr in die Ruhelage nach Aufhören der Kräfte nach und nach, jedoch vollständig. In einer dritten Gruppe von Fällen treten ebenfalls bei Einsetzen von neuen Spannungen sofort erhebliche Deformationen ein; der Körper deformiert sich aber auch dann noch langsam weiter, wenn die Spannungen stabil geworden sind; hören die Zusatzspannungen plötzlich auf, so nähert sich die Gestalt des Körpers erst schnell, dann immer langsamer einer Ruhelage, es bleibt aber eine dauernde Veränderung übrig, der Körper ist während der Deformation etwas „geflossen“. Am charakteristischsten treten diese Erscheinungen bei Körpern auf, die „flüssig“ oder fast flüssig sind. Bei der Betrachtung geophysikalischer Probleme verwechselte man oft „fließfähig“ und rig. In Wirklichkeit handelt es sich um zwei völlig verschiedene Vorgänge. So fließt z. B. Wachs sehr leicht; trotzdem kann man aus Wachs tönende Stimmgabeln herstellen; Wachs hat also eine große Fließfähigkeit, es ist „plastisch“, setzt aber trotzdem formverändernden Kräften merklichen Widerstand entgegen. Umgekehrt besitzt Radiergummi verhältnismäßig geringe

Rigkeit, er setzt Formveränderungen keinen besonders großen Widerstand entgegen, dagegen nimmt er nach Aufhören deformierender Spannungen immer wieder seine ursprüngliche Gestalt an, er ist nicht plastisch.

Charakteristisch für das Verhalten eines Körpers bei elastischen Deformationen ist seine Kompressibilität und seine Rigkeit (oder zwei andere der S. 446 angegebenen Größen). Dagegen existieren zwei weitere Konstanten, die sein plastisches Verhalten bzw. die hemmende Wirkung der inneren Reibung bei Torsionsspannungen charakterisieren. Man bezeichnet die erste dieser zwei Größen als „*Viskositätskoeffizienten*“. Leider werden die verschiedenen Koeffizienten in der Literatur nicht einheitlich definiert, man verzichtet vielfach sogar auf getrennte Definition und spricht nur von einem „*Viskositätskoeffizienten*“. Die Ursache hierfür dürfte in der Tatsache zu suchen sein, daß bisher fast ausschließlich die Viskosität von Flüssigkeiten untersucht wurde, für die allein die „*innere Reibung*“ eine praktische Bedeutung hat, während bei festen Körpern durch „*innere Reibung*“ einerseits elastische Formveränderungen verzögert, andererseits Fließvorgänge sehr erschwert werden können.

Fällt in einer *Flüssigkeit* eine Kugel mit dem Radius r und der Dichte ρ , so wird ihre Geschwindigkeit schließlich konstant gleich c . Dann ist der Koeffizient ν der Viskosität in der Flüssigkeit gegeben durch

$$\nu = \frac{2}{9} \frac{\rho}{c} R^2 g \dots \dots \dots (420)$$

wo g = Schwerebeschleunigung. Andererseits gilt für Flüssigkeiten, die aus engen Röhren ausströmen, das Gesetz von POISEUILLE, wonach

$$\nu = \frac{\pi}{V} \frac{p_0 - p}{8 l} r^4 \dots \dots \dots (421)$$

ist, falls $p_0 - p$ = Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende der Röhre, l deren Länge, r ihr Radius, V = ausströmendes Volumen pro Sekunde. Hiernach besteht bei Flüssigkeiten eine Beziehung zwischen Fließgeschwindigkeit und Koeffizienten der inneren Reibung.

Bei festen Körpern sind alle diese Beziehungen noch wenig untersucht. Eine wesentliche Komplikation besteht darin, daß bei kristallinen Körpern überhaupt eine bestimmte Mindestspannung vorhanden sein muß, damit Fließvorgänge beginnen können. Man bezeichnet sie als „*Fließwiderstand*“ (englisch: strength). Der Fließwiderstand hängt sowohl vom allseitigen Druck im Ruhezustand wie von der Temperatur ab. Ist er nicht erreicht, so führt der betr. Körper bei Eintreten von Spannungen nur elastische Deformationen aus.

Wirkt in einem völlig elastischen Körper eine Kraft F , sind weiter μ der Torsionsmodul und S die Verschiebung, so ist $\mu S = F$. Besitzt der Körper jedoch Zähigkeit, so nimmt die Verschiebung nicht sofort den endgültigen Wert an; nach dem üblichen, von MAXWELL vorgeschlagenen Ansatz¹⁾ ist im Falle von *Viskosität*

$$\mu S = F + \frac{1}{t} \int F dt; \quad S = \frac{F}{\mu} + \frac{1}{\mu t} \int F dt \dots \dots (422)$$

wo t eine Konstante ist. Man erkennt, daß die Verschiebung sofort den Wert $F:\mu$ erreicht und dann mit der Zeit um $\frac{1}{\mu t} \int F dt$ anwächst. Verschwindet F ,

¹⁾ Philos Mag., 35, 134, 1868.

so bleibt eine dauernde Verschiebung übrig, die durch diesen Betrag gegeben ist. Die theoretische Behandlung wird aber dadurch erschwert, und manche Fehlschlüsse wurden dadurch verursacht, daß t nur solange den angegebenen Wert (in der Praxis vermutlich nur angenähert konstant) haben kann, als der Fließwiderstand nicht unterschritten wird. Tritt dies ein, oder war dies schon von Anfang an der Fall, so ist $t = \infty$.

Nach H. JEFFREYS¹⁾ schlug anderseits Sir JOSEPH LARMOR folgende Beziehung für den *Reibungswiderstand* vor, der verhindert, daß kristalline Körper bei Scherungen sofort den Endzustand einnehmen:

$$\mu \left(S + f \frac{\partial S}{\partial t} \right) = F; \qquad S = \frac{F}{\mu} - f \frac{\partial S}{\partial t} \quad \quad (423)$$

In diesem Falle ist das Glied der inneren Reibung proportional der Veränderung der Verschiebung S ; f wird wieder konstant vorausgesetzt. Ist die Spannung F konstant, so nähert sich die Verschiebung asymptotisch dem Werte $F:\mu$, der bei völlig elastischen Körpern sofort angenommen würde. Diese Art von Zähigkeit würde also nicht ein Fließen über den bei völlig elastischen Körpern eintretenden Zustand hinaus bewirken, sondern die innere Reibung (ähnlich der elastischen Nachwirkung) würde nur verhindern, daß dieser Zustand sofort erreicht wird. Offenbar tritt hierbei eine weitere Konstante auf, so daß wir nunmehr folgende, vermutlich voneinander unabhängige Konstanten haben, welche Abweichungen der Deformation von Körpern von den rein elastischen Vorgängen bewirken:

Einen *Viskositätskoeffizienten* (bei allseitiger Kompression kann kein Fließen eintreten), welcher die Fließfähigkeit des betr. Stoffes charakterisiert; wir wählen hierzu $\nu = \mu t$ und *einen Koeffizienten der inneren Reibung*, der ein Maß für die Geschwindigkeit ist, mit der in einer nicht viskosen Substanz bei Auftreten einer Spannung der Endzustand erreicht wird. Wir bezeichnen ihn mit $\eta = \mu f$.

JEFFREYS (a. a. O.) kombinierte (422) mit (423) und erhielt so folgende Beziehung für den Fall, daß beide Vorgänge wirken:

$$\mu \left(S + k \frac{\partial S}{\partial t} \right) = F + \frac{1}{t} \int F dt \quad \quad (424a)$$

oder

$$S = \frac{F}{\mu} + \frac{1}{t\mu} \int F dt - f \frac{\partial S}{\partial t} \quad \quad (424b)$$

H. JEFFREYS²⁾ bezeichnet einen Körper, welcher der Bedingung (422) genügt, als „elasticoviscos“, einen solchen, der Gleichung (423) genügt, als „firmoviscos“. Charakteristisch für beide ist das Verhalten in Spezialfällen:

nach (422), elasticoviscos		nach (423), firmoviscos
Verschiebung S konst. (t klein, kurzperiod. Beweg.)	$F = \mu S$ (wie rein elastisch)	$F = \mu S$ (wie rein elastisch)
Kurzperiod. Beweg.	$F = \mu S$ (wie rein elastisch)	$S = 0$ (wie völlig rig)
μf endlich, $\mu = 0$	—	$F = \nu \frac{\partial S}{\partial t}$ (viskose Flüssigk.)
$\mu f = 0$	—	$F = 0$ (reine Flüssigkeit)
Langperiod. Beweg. $\mu t = \nu$	$F = \nu \frac{\partial S}{\partial t}$ (wie visk. Flüssigk.)	$F = \mu S$ (wie rein elastisch)

Dabei ist überall vorausgesetzt, daß es sich um Scherung handelt.

1) Monthly Not. Roy. Astronom. Soc. London, 77, 449, 1917.

2) The Earth, 2nd Edition, S. 264 ff. Cambridge, 1929.

Man erkennt, daß stets dann, wenn die Quadrate der Verschiebungen vernachlässigt werden können, die Lösung für den allgemeinen Fall aus der Lösung für den rein elastischen Fall gewonnen werden kann, indem man

$$\mu f(t) \text{ durch } \mu \frac{\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}\right)} f(t) \text{ ersetzt} \quad (425)$$

Im Falle der Firmoviskosität ist der Nenner 1, im Falle der Elasticoviskosität der Zähler 1. Bei einem nahezu elastischen Körper ist t sehr groß, $\frac{1}{t}$ klein, und angenähert zu ersetzen

$$\mu f(t) \text{ durch } \mu \left(f(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t} - \frac{1}{t} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right) \quad (426)$$

Es fragt sich nun, wie sich die übrigen elastischen Konstanten ändern.

a) *Fall des Fließens* (Elasticoviskosität). Nach (425) ist $\mu f(t)$ zu ersetzen durch

$$\frac{\mu}{1 + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}} f(t).$$

Dieser Operator ist jedoch in der Praxis nicht leicht zu behandeln, man schreibt dafür besser die identische Beziehung¹⁾:

$\mu f(t)$ ist zu ersetzen durch:

$$\mu f(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t dt e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \quad (427)$$

Wendet man diese Beziehung auf einen Vorgang an, etwa die Störung des Gleichgewichtes in einem Medium, so muß man λ , die andere LAMÉsche Konstante, ersetzen durch λG , wo G ein noch unbekannter Operator ist, der additive Eigenschaften besitzt. Die Bewegungsgleichungen sind dann in Vektordarstellung, falls wir mit F den Operator $e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t dt e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\partial}{\partial t}$ bezeichnen, von der Form

$$P_{xx} = \lambda G (\operatorname{div} \mathfrak{f}) + 2 \mu F \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right) \quad (428)$$

Bezeichnen wir weiter mit $|\mathfrak{P}|$ die Spur \mathfrak{P} , so wird

$$|\mathfrak{P}| = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = 3 \lambda G (\operatorname{div} \mathfrak{f}) + 2 \mu F (\operatorname{div} \mathfrak{f}) \quad (429)$$

Nun ist anderseits nach der Elastizitätstheorie

$$|\mathfrak{P}| = (3 \lambda + 2 \mu) \operatorname{div} \mathfrak{f} \quad (430)$$

und somit

$$G(x) = \left(1 + \frac{2 \mu}{3 \lambda}\right) x - \frac{2 \mu}{3 \lambda} F(x) \quad (431)$$

¹⁾ B. GUTENBERG und H. SCHLECHTWEG, Physikal. Zeitschr. 31, 745, 1930.

d. h. $\lambda f(t)$ ist zu ersetzen durch

$$\lambda f(t) + \frac{2}{3} \mu \left(f(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t dt e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (431a)$$

Bildet man nun den Ausdruck für den Inkompressibilitätsfaktor $k = -(\lambda + \frac{2}{3} \mu)$, so hebt sich das Glied mit dem Operator heraus, und es bleibt genau der alte Wert $-(\lambda + \frac{2}{3} \mu)$ übrig, d. h. k ist invariant bei diesen Vorgängen, *die Komprimierbarkeit von zähen Körpern folgt dem gleichen Gesetz wie die von rein elastischen Körpern, bei reiner Kompression tritt nie Fließen auf.* Dieses Ergebnis ist durch Gleichung (430) bedingt.

b) *Fall der Verzögerung der Bewegung durch innere Reibung.* Nach (425) ist nun

$$\mu f(t) \text{ zu ersetzen durch } \mu f(t) + \mu \mathfrak{f} \frac{\partial f(t)}{\partial t}.$$

Wir setzen für λ nun H , wo H wieder ein unbekannter Operator ist. Gleichung (428) lautet nun, falls $J(x) = x + k \frac{\partial x}{\partial t}$,

$$P_{xx} = H(\operatorname{div} \mathfrak{f}) + 2 \mu J \frac{\partial S_x}{\partial x} \dots \dots \dots (432)$$

und es wird

$$|\mathfrak{P}| = 3 H(\operatorname{div} \mathfrak{f}) + 2 \mu J(\operatorname{div} \mathfrak{f})$$

und nach (430)

$$3 H(\operatorname{div} \mathfrak{f}) + 2 \mu J(\operatorname{div} \mathfrak{f}) = (3 \lambda + 2 \mu) \operatorname{div} \mathfrak{f}$$

$$H(x) = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) x - \frac{2}{3} \mu x - \frac{2}{3} \mu \mathfrak{f} \frac{\partial x}{\partial t}$$

oder

$$H(x) = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \mathfrak{f} \frac{\partial}{\partial t} \right) x \dots \dots \dots (433)$$

d. h. $\lambda f(t)$ ist zu ersetzen durch

$$\lambda f(t) - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \quad \text{wo } \eta = \mu \mathfrak{f} \dots \dots \dots (433a)$$

Man sieht, daß auch in diesem Falle *nur eine neue Konstante, η , auftritt.*

Berechnet man nun das neue k nach (101), so findet man, daß es *auch in diesem Falle unverändert bleibt*, d. h., auch wenn innere Reibung im allgemeinen das Eintreten des Endzustandes verzögert, tritt diese *Verzögerung nicht ein*, wenn es sich um reine Kompression handelt. Auch dieses Ergebnis ist durchaus verständlich, da in diesem Falle die Moleküle ihre Lage zueinander nicht ändern, also auch jeder Anlaß zur Reibung fehlt.

§ 184. Die Bestimmung der Koeffizienten der inneren Reibung (Koeffizienten der Firmoviskosität). Die Bestimmung der Koeffizienten der inneren Reibung geschieht so, daß man einem an einem Ende eingeklemmten Stab eine Bewegung erteilt, den Stab schwingen läßt und die Amplitudenabnahme untersucht. Dabei kann der Stab Torsionsschwingungen oder Pendelschwingungen ausführen¹⁾ und er kann z. B. am Ende auch belastet werden.

¹⁾ Aus der Literatur: W. VOIGT, Wiedemanns Annalen der Physik, **47**, 671, 1892. — HONDO AND KONNO, Philos. Mag. **42**, 115, 1921. — JOKIBE AND SAKAI, ebenda, S. 397. — SUBRAHMANIAM, ebenda (7), **3**, 854, 1927 u. a. — GUTENBERG und SCHLECHTWEG, Physikal. Zeitschr., **31**, 745, 1930.

Am einfachsten gestaltet sich die Theorie im Falle von Torsionsschwingungen. Die Bewegung der Teilchen ist dann rein schierend, so daß man die Substitution für μ nach (425) vornehmen darf. Im rein elastischen Falle lautet die Gleichung für den Torsionswinkel Θ für einen l cm langen Stab mit dem Radius r , dem Trägheitsmoment J und dem Righeitsmodul μ

$$J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \mu C \Theta = 0; \quad \text{wo} \quad C = \frac{\pi r^4}{2l} \quad \dots \quad (434)$$

Im Falle der inneren Reibung ist $\mu f(t)$ zu ersetzen durch $\mu \left[f(t) + \mathfrak{f} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right]$, wir erhalten also dann

$$J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \mu \mathfrak{f} C \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mu C \Theta = 0 \quad \dots \quad (435)$$

mit der Lösung

$$\Theta = \Theta_0 e^{-C \mu \mathfrak{f} \frac{t}{2J}} \sin(n t + \varepsilon); \quad n = \frac{2\pi}{T} \quad \dots \quad (436)$$

In der Literatur wird $\eta = \mu \mathfrak{f}$ als „Koeffizient der inneren Reibung“ bezeichnet (vgl. S. 531). Das logarithmische Dekrement Δ ergibt sich zu

$$\Delta = \frac{C \eta T}{2J} = \frac{\pi r^4 \mu \mathfrak{f} T}{4Jl} \quad \dots \quad (437)$$

also ist

$$\mu \mathfrak{f} = \eta = \frac{4Jl\Delta}{\pi r^4 T} \quad \dots \quad (438)$$

In Tabelle 72 sind einige Beobachtungen hierfür zusammengestellt.

Tabelle 72

Koeffizienten η der inneren Reibung in CGS (Größenordnung)

Material	η	μ	\mathfrak{f}
Eisen	$1,4 \cdot 10^9$	$7,8 \cdot 10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
Gold	$1,7 \cdot 10^9$	$3,0 \cdot 10^{11}$	$6 \cdot 10^{-3}$
Zink	$2,7 \text{ bis } 4,1 \cdot 10^9$	$3,5 \cdot 10^{11}$	$8 \text{ bis } 120 \cdot 10^{-3}$
Platin	$0,17 \cdot 10^9$	$6,8 \cdot 10^{11}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	$0,3 \text{ bis } 2,5 \cdot 10^9$	$3,4 \cdot 10^{11}$	$0,9 \text{ bis } 7 \cdot 10^{-3}$
Zinn	$3,6 \cdot 10^9$	$1,6 \cdot 10^{11}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$

Im Falle des Stabes, der Pendelschwingungen ausführt, fand SCHLECHTWEIG (a. a. O.) in erster Annäherung für das logarithmische Dekrement λ

$$\lambda = 0,045 \mathfrak{f}^2 n^2; \quad \text{wo} \quad n = \frac{2\pi}{T} \quad \dots \quad (439)$$

Leider wurde in diesen Fällen bisher anscheinend nur λ , nicht aber T veröffentlicht. Es ist dann

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\lambda}{0,045}} \quad \dots \quad (440)$$

Nach den Beobachtungen war T im allgemeinen anscheinend etwa 0,6 bis 0,7 sec, also $n =$ etwa 10 und zur Abschätzung der Größenordnung von \mathfrak{f} könnten wir

ansetzen $f = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda}$. λ ist z. B. für Glas, Nickel und andere zähe Körper von der Größenordnung 0,0001, somit f von der Größenordnung 10^{-2} in guter Übereinstimmung mit den Werten der Tabelle 72.

Einen völlig anderen Koeffizienten benutzten KIMBALL und LOVELL¹⁾. Sie definierten ξ als den Energieverlust pro Zykloseinheit (Schwingung). Es ist allerdings ziemlich sicher, daß dann ξ von T abhängt. Zur Feststellung von ξ benutzten sie verschiedene Methoden. Bei der ersten wird ein Stab der zu untersuchenden Substanz an einem Ende horizontal so eingeklemmt, daß er um die Längsachse rotieren kann, und dann durch ein am freien Ende angehängtes Gewicht gebogen. Läßt man ihn nun rotieren, so entsteht durch die innere

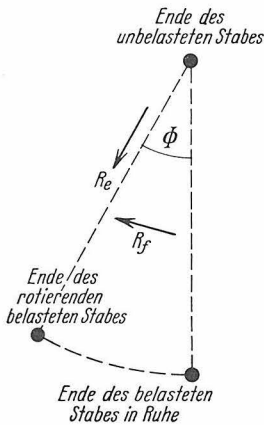


Fig. 172
Zur Bestimmung der
inneren Reibung nach
KIMBALL und LOVELL

Reibung ein meßbarer Energieverlust, der um so größer ist, je größer die innere Reibung des betreffenden Materials ist.

KIMBALL und LOVELL definierten die Reibungskonstante ξ durch die Beziehung

$$F = \xi f^2 \quad (441)$$

unter der Voraussetzung, daß F konstant ist.

Dabei ist F der Reibungsverlust pro Volumeneinheit und Umdrehung, f die Maximalamplitude während eines Umlaufes. Die Untersuchungen ergaben, daß der Wert für ξ , der sich so ergab, ziemlich unabhängig von der Umdrehungsgeschwindigkeit ist, doch ist die Methode trotzdem nur als Näherungsmethode zu betrachten.

Bei der Rotation, während der das Gewicht den Stab nach unten zieht, möge der Stab um den Winkel Φ von der Vertikalen entfernt werden. Der Winkel Φ liegt also zwischen den Strecken Stabende ohne Belastung—Stabende belastet in Ruhe, und Stabende ohne Belastung—Ende des rotierenden belasteten Stabes (Fig. 172). Seien weiter d die Entfernung belastetes—unbelastetes Stabende, R_e und R_f die Komponenten der Kraft, welche dem Gewicht W entgegenwirken, und zwar R_e zum Stabende hin, R_f senkrecht dazu, so ist die potentielle Energie der abwärts gerichteten Biegung gegeben durch

$$W_e = \frac{1}{2} R_e d \quad (442)$$

¹⁾ Physical Review, 30, 948, 1927.

wo N die Zahl der Spannungszyklen pro Sekunde ist. Es ist also

$$\xi = - \frac{E \varepsilon}{f^2 N} \frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{1}{E N} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ nach (453)}$$
$$\xi = - \frac{1}{E N} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$$

}

. (454a)

wo y die Amplitude an einem beliebigen Punkt ist. *Setzt man für y die übliche Kurve für Dämpfung voraus:*

$$y = y_0 e^{-\alpha t} \text{}$$

(455)

wobei α in erster Annäherung als von der Periode P unabhängig betrachtet wird, was aber nur sehr roh gilt, und ist ferner T die Periode der Schwingung, so gilt für das logarithmische Dekrement δ der Bewegung

$$\delta = \log \text{nat} \frac{y_0 e^{-\alpha t}}{y_0 e^{-\alpha (t+T)}} = \alpha T = \frac{\alpha}{N} \text{}$$

(456)

Nach (455) ist

$$\alpha = - \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} \text{ also } \delta = - \frac{1}{N y} \frac{dy}{dt} \text{}$$

(457)

somit nach (454a)

$$\xi = \frac{\delta}{E} \text{}$$

(458)

Auch diese Beziehung gilt naturgemäß nur in ganz roher Annäherung. Wenn Gleichung (458) bei Torsionsschwingungen benutzt wird, so ist E durch den Righeitsmodul μ zu ersetzen; man erhält dann ξ_s , im anderen Falle ξ_p .

In Tabelle 73 ist eine Reihe von verschiedenen Ergebnissen über diese beiden Größen nach Zusammenstellungen von KIMBALL und LOVELL, zum Teil nach deren eigenen Messungen wiedergegeben, doch handelt es sich dabei um eine Methode, die mit sehr rohen Voraussetzungen arbeitet. In Wirklichkeit muß ξ von der Periode abhängen, da die innere Reibung bei sehr langsamen Schwingungen pro Schwingung anders wirkt ist als bei schnellen Schwingungen.

Tabelle 73

Koeffizienten ξ_p und ξ_s der inneren Reibung in cm/sec gr.—¹ berechnet von KIMBALL und LOVELL. Nach Beobachtungen von δ verschiedener Autoren. Die angegebenen Werte von E und μ sind in Dyn/cm² und mit 10¹¹ zu multiplizieren

Material	E	ξ nach KIMBALL-LOVELL
Gummi 90 ⁰ / ₀	—	19 · 10 ^{—9}
Zelluloid	0,2	21 · 10 ^{—12}
Zinn	3,1	4 · 10 ^{—13}
Glas	6,3	10,2 · 10 ^{—15}
Kupfer	10	5,0 · 10 ^{—15}
Eisen	19	4,2 · 10 ^{—15}
Stahl	21	2,3 · 10 ^{—15}
Nickel-Stahl	21	1,1 · 10 ^{—15}
Phosphorbronze . . .	11,6	0,31 · 10 ^{—15}

Material	Autor	E	μ	ξ_P	ξ_S
Stahl	VOIGT	21	8	$1,1 \cdot 10^{-15}$	$2,3 \cdot 10^{-15}$
Zinn	„	3,2	1,6	$40 \cdot 10^{-15}$	$69 \cdot 10^{-15}$
Nickel	HONDA	21	?	$0,8 \cdot 10^{-15}$?
Glas	GUYE	?	5,5	?	$1,8 \cdot 10^{-15}$
Glas	QUIMBY	?	?	$0,21 \cdot 10^{-15}$?
Stahl	LINDSAY	10	?	$1,7 \cdot 10^{-15}$?
Phosphorbronze . . .	„	11,8	?	$0,31 \cdot 10^{-15}$?
Nickel	VOIGT	21	7,8	$0,8 \cdot 10^{-15}$	$1,4 \cdot 10^{-15}$

§ 185. Der Viskositätskoeffizient. Auch für den Viskositätskoeffizienten ν existieren bisher keine einheitlichen Definitionen. Erfreulicherweise sind bisher wenigstens bei der Untersuchung der Viskosität der Erde von den verschiedenen Autoren die gleichen Definitionsgleichungen benutzt worden: die so bestimmten Werte von ν wollen wir zunächst betrachten. Wir gehen aus von der Gleichung (422). Nach ihr ist, falls F = wirkende Kraft, S = Verschiebung,

$$F = \mu S - \frac{1}{t} \int F dt; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \mu \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{t} F \dots (459)$$

Ist S = konstant, so wird

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{t} F; \quad F = F_0 e^{-\frac{t}{t}}$$

t ist also die „Relaxationszeit“, das heißt die Zeit, in der die Spannung bei einer vorgegebenen Verschiebung S durch die Viskosität auf $1/e$ ihres Wertes sinkt. Bei der in der Geophysik üblichen Definition von ν lautet nun die Definitionsgleichung

$$\nu = \mu t \dots (460)$$

Auch über die Bestimmung von ν herrscht noch ziemliche Unklarheit. Eine Zusammenstellung von Methoden und Ergebnissen hat z. B. BORIS WEINBERG¹⁾ gegeben. So kann man z. B. einen langen dünnen Draht des zu untersuchenden Stoffes tordieren und vertikal aufhängen und den Torsionswinkel Θ pro Zeiteinheit feststellen. Sind l die Drahtlänge, r dessen Radius, F das Moment der Torsionskraft, δ die Elastizitätsgrenze, so wird nach WEINBERG

$$\nu = \left(\frac{2Fl}{\pi r^4} - \frac{4l\delta}{3r} \right) \frac{1}{\Theta} = \frac{\mu}{\Theta} - \frac{4l\delta}{3r\Theta} \dots (461)$$

Weitere Methoden bestehen darin, daß man einen drehbaren Zylinder in den zu untersuchenden Stoff einbettet und ein Drehmoment auf ihn ausübt, oder daß man ein Prisma einem scherenden Zug aussetzt. Für diese und einige andere Methoden hat WEINBERG ebenfalls die Beziehungen zur Berechnung von ν zusammengestellt, ferner Werte, die auf verschiedene Weise gewonnen wurden. Tabelle 74 gibt einen Auszug aus diesen Angaben. Die in der Tabelle angegebenen Werte sind teils Einzelbeobachtungen, teils Mittel aus mehreren Werten. Bei den eingeklammerten Werten beträgt die Unsicherheit der Größenordnung etwa ± 2 im Exponenten von 10. Im allgemeinen wird der Viskositätskoeffizient bei solchen Untersuchungen erst nach längerer Zeit konstant. So fand z. B. WEINBERG

¹⁾ Indian Journal of Physics, 1, 279, 1927.

für Steinsalz bei Zimmertemperatur nach drei Wochen folgende Werte von ν , die mit 10^{16} zu multiplizieren sind: 5,7; 5,7; 6,2; als Mittel der Beobachtungen vom dritten bis sechsten Monat ergab sich dagegen $230 \cdot 10^{16}$. Zwei andere Serien ergaben nach 84 bzw. 714 Tagen 180 bzw. $620 \cdot 10^{16}$ g/cm sec.

Tabelle 74

Viskositätskoeffizienten nach Zusammenstellungen von WEINBERG
in $\frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}}$ und hieraus nach (460) berechnete Werte t in sec

Material	Autor	Temperatur	ν	μ ca.	t ca. sec
Schuhmacherpech	TROUTON	?	$2 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{c} 10^6 \\ \text{bis } 10^8 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{c} 1 \text{ bis} \\ 100 \end{array} \right\}$
„	OBERMAYER	12^0	$3 \cdot 10^8$		
„	„	15^0	$1 \cdot 10^8$		
„	„	20^0	$1\frac{1}{2} \cdot 10^8$		
„	WEINBERG	15^0	$2 \cdot 10^8$		
„	„	50^0	$1\frac{1}{2} \cdot 10^4$		(0,001
Asphalt	„	15^0	$3 \cdot 10^{10}$?	?
„	„	50^0	$1 \cdot 10^6$?	?
Eis der Neva	„	0^0	$1 \cdot 10^{13}$	$(3 \cdot 10^{10})$	(300)
Eis vom Hintereiserner .	„	0^0	$\frac{1}{2} \cdot 10^{13}$	$3 \cdot 10^{10}$	500
Glas	} TROUTON und ANDREWS	575^0	$1 \cdot 10^{13}$	$\left. \begin{array}{c} \text{ca.} \\ 2 \cdot 10^{11} \end{array} \right\}$	(50)
„		710^0	$5 \cdot 10^{10}$		(1)
Kolophonium	BERGER	12^0	$1 \cdot 10^{17}$?	?
„	„	46^0	$3 \cdot 10^{12}$?	?
Blei	WEINBERG	20^0	$1 \cdot 10^{16}$	$8 \cdot 10^8$	10^7
Isländischer Spat	„	18^0	$1\frac{1}{2} \cdot 10^{16}$	$3 \cdot 10^{11}$	$\frac{1}{2} \cdot 10^5$
Steinsalz	„	18^0	$2 \cdot 10^{18}$	$(3 \cdot 10^{11})$	$\frac{2}{3} \cdot 10^7$
„	„	81^0	$2\frac{1}{2} \cdot 10^{17}$	$(2\frac{1}{2} \cdot 10^{11})$	10^6

Wie erwähnt wurden auch andere Definitionen für den Viskositätskoeffizienten gegeben, die zum Teil den im vorigen Paragraphen definierten Koeffizienten der inneren Reibung benutzen, ohne daß bisher eine Beziehung zwischen beiden festgestellt wurde. Das Problem ist dadurch so kompliziert, daß die Veränderungen eines Körpers, auf den Spannungen wirken, mit der Zeit durch ganz verschiedene Ursachen bedingt werden, und zwar einmal durch die Viskosität, die durch die in diesem Paragraphen angegebenen Beziehungen definiert ist, dann durch die elastische Nachwirkung und dann durch Vorgänge, die durch die Abweichung der Körper vom angenommenen idealen Zustand herühren, etwa Poren der Körper.

§ 186. Einfluß von Druck und Temperatur auf die Viskosität. Wie wir sahen, sind schon die Untersuchungen über die Viskosität von festen Körpern unter normalen Verhältnissen nicht sehr zahlreich. Es ist also nicht verwunderlich, daß über die Wirkungen von Druck und Temperatur, die für uns von besonderem Interesse sind, noch weniger bekannt ist. Bei Flüssigkeiten liegen zahlreiche Beobachtungen über den Einfluß des Druckes vor, die von wenigen Ausnahmen abgesehen, eine erhebliche Zunahme von ν durch den Druck ergeben. Fig. 173 gibt ein charakteristisches Bild für zähe Flüssigkeiten.

wo C und D wieder Konstanten sind, doch ergaben Untersuchungen von WASHBURN, SHELTON und LIBMANN¹⁾ sowie von ENGLISH²⁾, daß diese Beziehung für Gläser nur unterhalb etwa 800° gilt. H. LE CHATELIER³⁾ zeigte dann, daß die Beobachtungen von WASHBURN für zehn verschiedene Gläser durch folgende Beziehung zwischen 800 und 1500° dargestellt werden:

$$\log \log \nu = E - Ft \dots \dots \dots (464)$$

ν schwankt hierbei zwischen 500° und 600° wie 1:17 bis zu 1:170 und zwischen 800° und 1000° wie 1:13 bis zu 1:112. Auch J. W. LANE und E. W. DEAN⁴⁾ sowie GELHOFF und THOMAS⁵⁾ haben Untersuchungen in dieser Richtung angestellt.

Tabelle 75
Viskositätskoeffizienten ν in Dyn/cm² für einige Glas-
schmelzen bei verschiedenen Temperaturen
nach WASHBURN

Temperatur	70 % <i>SiO</i> ₂ 30 % <i>Na</i> ₂ <i>O</i> 0 % <i>CaO</i>	82,6 % 17,4 % 0 %	70 % <i>SiO</i> ₂ 20 % <i>Na</i> ₂ <i>O</i> 10 % <i>CaO</i>	73,5 % 16,5 % 10,0 %
1500°	38	214	38	48
1400	77	434	87	150
1300	160	1200	214	500
1200	420	4900	600	1,8·10 ³
1100	1,3·10 ³	3,2·10 ⁴	2·10 ³	7,1·10 ³
1000	4,4·10 ³	2,5·10 ⁵	8,5·10 ³	2,9·10 ⁴
900	2·10 ⁴	?	4,8·10 ³	1,2·10 ⁵
800	1,4·10 ⁵	?	4,3·10 ⁵	5,4·10 ⁵
750	4,3·10 ⁵	?	?	?

Tabelle 76
Viskositätskoeffizienten ν in Dyn/cm² für einige Glas-
schmelzen bei verschiedenen Temperaturen nach ENGLISH

Temperatur	ν	Temperatur	ν	Temperatur	ν
1310°	77	1410°	70	1400°	51
1240	96	1315	161	1310	83
1136	380	1194	547	1205	243
1028	1,8·10 ³	1100	1,9·10 ³	1014	2,7·10 ³
920	1,1·10 ⁴	992	8,9·10 ³	906	1,6·10 ⁴
790	2,7·10 ⁵	650	3,2·10 ⁸	745	1,6·10 ⁶
600	7,3·10 ⁸	555	9,5·10 ¹⁰	600	2,1·10 ⁹
485	5,6·10 ¹²	505	6,2·10 ¹²	500	3,15·10 ¹²

1) The Viscosities and Surface Tension . . . , Bull. Univ. Illinois 21, Nr. 33, 1924.

2) Journal Soc. Glass Techn. 7, 25, 1923 und 8, 205, 1924.

3) C. R. 179, 517, 1924 Nr. 11.

4) Journal Ind. and Engl. Chem. 16, 305, 1924.

5) Zeitschrift für Technische Physik, 7, 260, 1926.

Tabelle 77

Verhältnis der Viskosität ν bei verschiedenen Drucken p in kg/cm^2 und Temperaturen zur Viskosität ν für 30° und $1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ Druck bei Glyzerin nach BRIDGMAN

Temp.	$p = 1$	2000	6000	12000
30°	1,0	2,1	22,2	?
75°	0,076	0,16	0,66	4,2

§ 187. Das Fließen fester Körper. Wird ein Körper mit einem Viskositätskoeffizienten ν einem gerichteten Druck p ausgesetzt, so beginnt er zu fließen, sofern p größer ist als der Fließwiderstand. Bringt man etwa den zu unter-

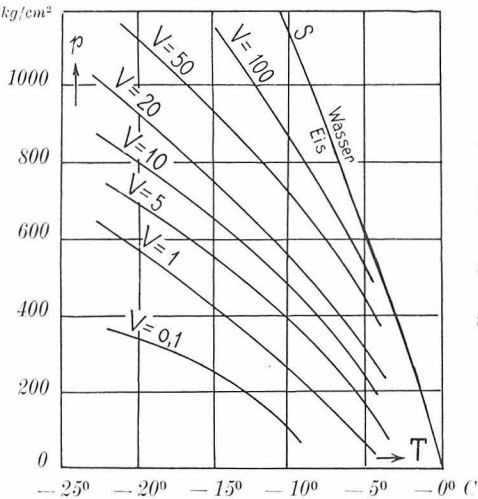


Fig. 175
Ausflußgeschwindigkeit V (Einheit ca 6 cm pro Minute) von Eis aus einer ringförmigen Öffnung (Querschnitt $0,0141 \text{ cm}^2$) bei verschiedenen Drucken p und Temperaturen T sowie Schmelzkurve S nach Messungen von G. TAMMANN

suchenden Körper in eine Tube aus Material, das einen wesentlich höheren Viskositätskoeffizienten hat, so gelten nach WEINBERG (a. a. O. S. 538) folgende Beziehungen, falls R der Radius der Tube, v die Fließgeschwindigkeit in dem Abstand r von der Tubenmitte ist und δ die Elastizitätsgrenze (Fließwiderstand):

$$v = \frac{1}{\nu} \left[\frac{p}{4} (R^2 - r^2) - \delta (R - r) \right] \dots \dots \dots (465)$$

insbesondere in Tubenmitte:

$$v_{\text{max}} = \frac{1}{\nu} \left[\frac{p}{4} R^2 - \delta R \right] \dots \dots \dots (466)$$

Das ausströmende Volumen V pro Sekunde ergibt sich aus (465) durch Integration:

$$V = \int_0^\infty v \cdot 2 \pi r \, dr = \frac{\pi p R^4}{8 \nu} - \frac{\pi \delta R^3}{3 \nu} = \frac{\pi R^3}{\nu} \left(\frac{p R}{8} - \frac{\delta}{3} \right) \dots \dots (467)$$

Für $\delta = 0$ ergibt sich eine etwas speziellere Fassung ähnlich dem Gesetz von POISEUILLE. Bei der Anwendung der Beziehung ist zu beachten, daß es sich nur um das Fließen in einer Röhre handelt. Aber auch bei Fließvorgängen im Freien dürfte die Fließgeschwindigkeit, sofern der Druck erheblich über dem

Fließwiderstand liegt, in erster Annäherung proportional dem gerichteten Druck und umgekehrt proportional dem Viskositätskoeffizienten ν sein. Andererseits gibt uns die Beziehung (467) die Möglichkeit, durch Fließversuche unter verschiedenen Umständen Aufschlüsse über den Viskositätskoeffizienten zu erhalten.

Das Fließen fester Körper ist offenbar ein recht komplizierter Vorgang, über den Näheres in Band 3 des Handbuches angegeben ist. Die Ergebnisse bestätigen das, was schon oben auf anderem Wege über die Viskosität gefunden worden war: Die Geschwindigkeit, mit der Substanzen unter Druck aus Tuben ausfließen, nimmt mit wachsendem allseitigem Druck (Manteldruck) ab, mit wachsendem gerichtetem Druck und wachsender Temperatur zu, und zwar besonders stark, wenn man sich der Schmelzkurve nähert. Fig. 175 gibt einen

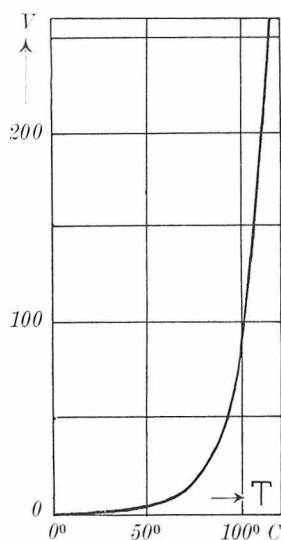


Fig. 176
Ausflußgeschwindigkeit
 V (Einheit willkürlich)
von Zinn bei einem
Druck von 1000 kg/cm^2
und verschiedenen
Temperaturen T nach
Messungen von
G. TAMMANN

Überblick über die Ausflußgeschwindigkeit von Eis nach Beobachtungen von G. TAMMANN¹⁾ bei verschiedenen Temperaturen und Drucken, wobei zu beachten ist, daß bei Wasser-Eis die Schmelzkurve ausnahmsweise bei steigendem Druck nach fallenden Temperaturen verläuft, Fig. 176 zeigt die Ausflußgeschwindigkeit von Zinn bei einem Druck von 1000 kg/cm^2 und wachsender Temperatur.

Bei der Betrachtung von Fließkurven darf man nicht übersehen, daß die Ausflußgeschwindigkeit mit zunehmendem Überdruck (gerichtetem Druck) zunimmt, so daß man aus der Ausflußgeschwindigkeit ohne Berücksichtigung des Druckes p nicht auf die Viskosität schließen kann; man muß vielmehr Gleichung (467) benutzen.

Bei Erreichen der Schmelzkurve tritt bei Fließversuchen meist eine plötzliche, un stetige Beschleunigung des Ausflusses ein, das heißt, in der Schmelzkurve nimmt die Viskosität meist sprunghaft ab. Nach TAMMANN (a. a. O.) wird der Sprung bei wachsendem allseitigem Druck (Manteldruck) immer kleiner, und bei SiO_2 und sauren Silikaten kann die Viskosität der Schmelze und der Kristalle von gleicher Größenordnung werden. Auch bei wachsender Unterkühlung von Flüssigkeiten nimmt sie stark zu bis zu Werten, die den festen Kristallen eigen sind. Beim Kristallisieren solcher „Gläser“ ist die Änderung der Viskosität oft

¹⁾ Aggregatzustände, 2. Aufl. Leipzig 1923.

kontinuierlich, so daß eine bestimmte Temperatur oder ein bestimmter Augenblick der Kristallisation durch Feststellung der Viskositätsänderung in diesen Fällen nicht möglich ist.

Die Bedeutung der Fließversuche für unser Problem liegt, wie erwähnt, in der Tatsache, daß der Viskositätskoeffizient unter sonst gleichen Bedingungen der Fließgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist.

§ 188. Die Fließgrenze (Strength, Fließwiderstand). Wird ein Körper verhältnismäßig kleinen Spannungen ausgesetzt, so sind die Veränderungen durch die Gleichungen (77)ff. gegeben: hören die Spannungen auf, so stellt sich der Ausgangszustand wieder her. Geht man nun zu höheren Spannungen über, so

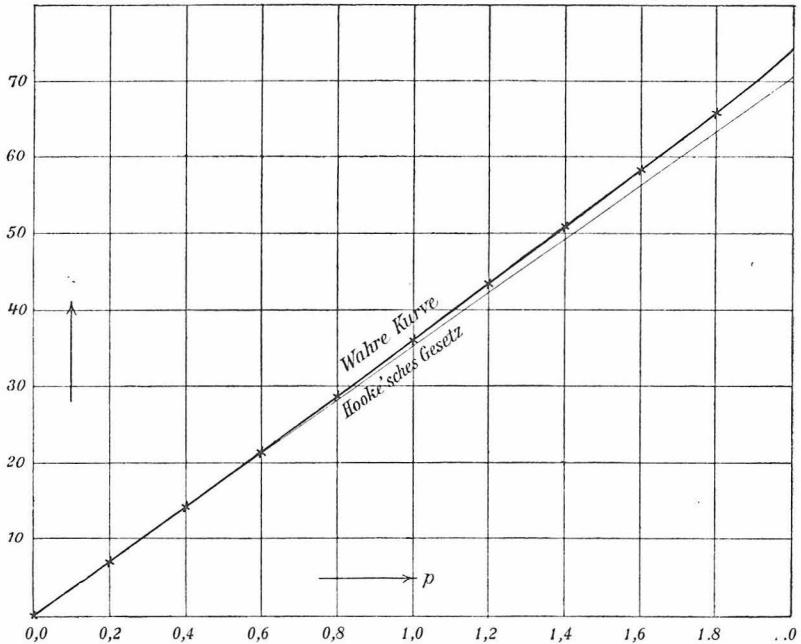


Fig. 177

Abweichung der Deformation x vom HOOKESchen Gesetz.

Aus AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 3

wird schließlich ein Punkt erreicht, von dem ab der Körper zwar auch noch mit großer Annäherung den Gesetzen für rein elastischen Vorgängen folgt, bei Aufhören der Spannungen wird jedoch die Ausgangslage nicht wieder völlig erreicht, es bleibt eine „elastische Nachwirkung“ zurück. Die Grenze, von der ab dieser Vorgang erkennbar ist, wird als „Elastizitätsgrenze“ bezeichnet. Geht man zu noch höheren Spannungen über, so werden die Abweichungen vom HOOKESchen Gesetz, die auch bei verhältnismäßig kleinen Spannungen gefunden werden, in diesem Falle allerdings mit kleinen Beträgen (Fig. 177), immer beträchtlicher. Dabei hängt die Abweichung davon ab, wie oft der Körper Spannungen ausgesetzt wurde (Fig. 178). Schließlich treten Verschiebungen schon bei ganz kleinen Spannungsänderungen ein, in manchen Fällen sinkt hierbei die Spannung sogar vorübergehend, wir sind in den Bereich der Fließvorgänge gekommen. Die Übergangsstelle wird als „Fließgrenze“ bezeichnet, doch ist diese in vielen Fällen nicht durch einen Punkt, sondern durch ein Spannungsgebiet gegeben; an-

scheinend schließen sich die Fließbewegungen stetig an die elastischen Bewegungen an. Vielleicht folgen die elastischen Vorgänge überhaupt streng dem HOOKESchen Gesetz, und die Abweichungen sind dadurch bedingt, daß wir es nicht mit kompakten, sondern porenreichen Körpern zu tun haben. Andererseits wird hierdurch aber auch die Fließgrenze unscharf.

Die Spannung, welche zum Erreichen der Fließgrenze nötig ist, wird als „Fließwiderstand“ (englisch: Strength) bezeichnet. Solange diese Spannung nicht erreicht ist, kann keine merkliche Fließbewegung eintreten. Es muß also eine gewisse Spannung vorhanden sein, welche den Widerstand überwindet, den der Körper dem Fließen entgegensetzt. Die Ursache dürfte in dem Fließvorgang selbst liegen, auf den in Band 3 näher eingegangen wird.

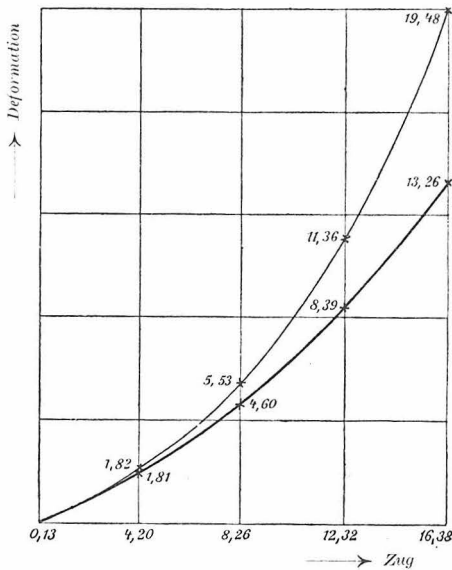


Fig. 178
Abweichung der Deformation bei Zugbeanspruchung von Sandstein vom HOOKESchen Gesetz nach BACH. Die dünne Kurve gilt für erstmalige, die dicke für spätere Belastung. Aus AUERBACH-HORT, Handbuch der Mechanik, Band 3

Der Fließwiderstand ist für eine ganze Reihe von geophysikalischen Vorgängen von größter Bedeutung, da in der Erdkruste zweifellos Fließvorgänge in erheblichem Umfange stattfinden (vgl. Band 3). Leider ist auch für ihn nur sehr wenig Beobachtungsmaterial vorhanden. Erschwerend kommt noch hinzu, daß viele Stoffe unter normalen Bedingungen brechen, bevor die Fließgrenze erreicht ist. Man bezeichnet solche als „spröde“. „Plastisch“ heißt eine Substanz, wenn sie einen kleinen Viskositätskoeffizienten hat, so daß sie also nach Erreichen der Fließgrenze leicht fließt, und „zäh“, wenn der Viskositätskoeffizient groß ist, so daß also wesentliche Steigerung der Spannung über den Fließwiderstand hinaus notwendig ist, um merkliches Fließen zu erzielen.

Viele Substanzen sind bei normalen Temperaturen spröde, bei höheren Temperaturen plastisch oder zäh. Bei Annäherung an die Schmelzkurve scheint der Fließwiderstand stark zu sinken (Fig. 179), und in Schmelzen praktisch Null zu sein, so daß der Unterschied zwischen Schmelzen (Gläsern) und den entsprechenden kristallinen Körpern weniger in der Viskosität als in dem Fließwiderstand besteht. Gläser würden also im Gegensatz zu kristallinen Körpern schon bei ganz kleinen Spannungen (gerichteten Drucken) fließen, während bei großen Spannungen, welche den Fließwiderstand der Kristalle überschreiten, kein merklicher Unterschied mehr zwischen Glas und Kristall vorhanden wäre.

Tabelle 78

a) Fließwiderstand bei Marmor und Sandstein bei Zimmertemperatur und verschiedenem allseitigem Druck (nach v. KÁRMÁN)

Marmor				Sandstein			
Druck in Atm.	Tiefe im Erdbinnern	Fließwiderstand Atm.	Dyn/cm ²	Druck in Atm.	Tiefe im Erdbinnern	Fließwiderstand Atm.	Dyn/cm ²
685	2 1/2 km	2880	2,9 · 10 ⁹	555	2 km	2580	2,6 · 10 ⁹
845	3 „	3210	3,2 · 10 ⁹	1550	5 1/2 „	3300	3,2 · 10 ⁹
1650	6 „	3900	3,8 · 10 ⁹	2475	9 „	4000	3,9 · 10 ⁹

b) Fließwiderstand von Quarz bei Zimmertemperatur (nach SOSMAN)

	Achse	⊥ Achse
Mittelwert	1,1 · 10 ⁹	0,8 · 10 ⁹
Maximalwert	1,2 · 10 ⁹	0,9 · 10 ⁹

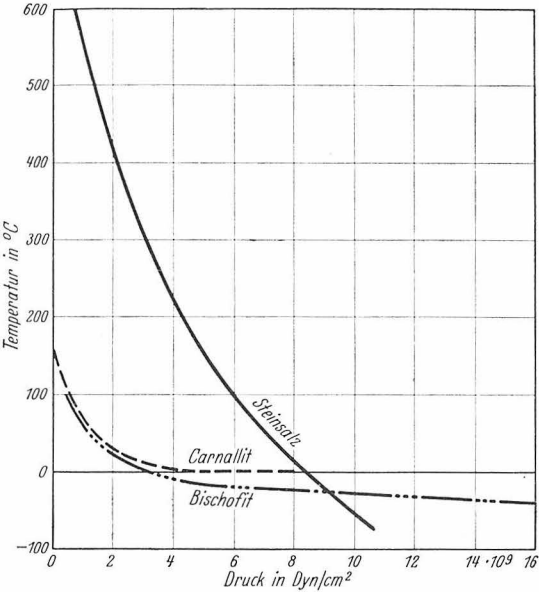


Fig. 179

Fließwiderstand (=Druck, bei welchem das Fließen beginnt) in Dyn/cm² nach GELLER

Untersuchungen über das Fließen von Gesteinen rühren vor allem von A. NÁDAI und T. v. KÁRMÁN her. In Tabelle 78a sind nach dessen Untersuchungen die Fließwiderstände von Marmor und Sandstein bei verschiedenen (allseitigen) Drucken zusammengestellt. Dazu ist noch zu bemerken, daß Marmor bis zu einem Druck von etwa 500 Atm. und Sandstein bis zu etwas geringerem Druck spröde war. Man erkennt, daß der Fließwiderstand mit wachsendem allseitigem Druck anwächst. Tabelle 78b zeigt einige charakteristische Werte für Quarz.

Wenden wir die Ergebnisse auf das Erdinnere an, so würde also die nach innen zunehmende Temperatur den Fließwiderstand herabmindern, er würde insbesondere bei Annäherung an die Tiefe, in der das Erdinnere eine Temperatur nahe der Schmelztemperatur hat, sehr klein werden, anderseits würde der steigende Druck in umgekehrter Richtung wirken, ohne daß er vermutlich bei Temperaturen in der Nähe der Schmelztemperatur das Ergebnis wesentlich ändern kann. Wohl aber ist damit zu rechnen, daß er in geringeren Tiefen die Wirkung der Temperatur kompensiert oder sogar den Fließwiderstand etwas über die Werte an der Erdoberfläche anwachsen läßt. Messungen hierüber scheinen jedoch noch völlig zu fehlen.

§ 189. Untersuchungen von SCHWEYDAR und PREY über die Viskosität im Erdinnern. Überschlagsrechnungen über den Viskositätskoeffizienten ν im Erdinnern wurden mehrfach angestellt, sie ergaben bisher aber nur den ungefähren Bereich der Größenordnung.

Daß ν in den obersten Schichten der Erde nicht übermäßig groß ist, zeigen die in Band 3 eingehender behandelten bruchlosen Bewegungen in der Erdkruste, z. B. die Senkung und Wiederhebung Skandinaviens während und nach der Eiszeit.

Abschätzungen des Zähigkeitskoeffizienten führte wohl zuerst W. SCHWEYDAR¹⁾ aus. Er fand z. B. auf Grund der Tatsache, daß die beobachteten und berechneten Eintrittszeiten der Gezeiten der festen Erde zusammenfallen, daß eine Schicht mit der Zähigkeit $\nu = 10^9$ höchstens 100 km und von der Zähigkeit $\nu = 10^{13}$ — 10^{14} (also etwa von der Zähigkeit von Glas) höchstens 600 km dick sein könnte. Anderseits folgt aus den Rechnungen von SCHWEYDAR, daß die NEWCOMBSche Periode der Polbewegungen nicht auftreten könnte, wenn für die Erde als Ganzes $\nu < 10^{18}$ ist, oder wenn in einer mehr als 500 km dicken Schicht $\nu = 10^{13}$ wäre.

H. PREY²⁾ untersuchte die Frage, wie sich ν im Laufe der Zeit geändert hat, wenn man voraussetzt, daß einerseits die Theorie von DARWIN über die Entstehung und Entwicklung des Systems Erde—Mond richtig ist (vgl. Band 3), anderseits die Verschiebung der Kontinente nach der WEGENERSchen Theorie durch Flutreibung zeitlich richtig herauskommt:

Es sei

n = die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde als Funktion der Zeit,

r_0 = Erdradius,

Ω = die Umlaufgeschwindigkeit des Mondes als Funktion der Zeit,

n_0, Ω_0 = die entsprechenden Werte heute,

u = Verhältnis des Rotationsmomentes der Mondbewegung zum Rotationsmoment der Erdbewegung heute,

$$\xi = (\Omega_0 : \Omega)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau = \frac{3 \kappa m}{2 c^3},$$

κ = Gravitationskonstante,

m = Masse des Mondes,

c = Entfernung des Mondes von der Erde als Funktion der Zeit,

τ_1 = Wert analog τ für die Sonne, konstant,

τ_0 = Wert von τ heute,

g = Schwerebeschleunigung,

i = Schiefe der Ekliptik,

¹⁾ Nach A. WEGENER, Scientia, Februar 1927.

²⁾ Gerlands Beitr. z. Geophysik, 15, 401, 1926.

w = mittlere Dichte der Erde,

ε = Phasendifferenz der halbtägigen Gezeiten des Erdkörpers gegenüber dem Himmelskörper,

ε' = desgleichen bei den gantztägigen Gezeiten,

ν = Viskositätskoeffizient der als homogen angesehenen Erde als Funktion der Zeit.

Dann ist nach DARWIN (vg. auch Band 1 und Band 3)

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{19 n \nu}{g r_0 w}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{19 n \nu}{2 g r_0 w} \quad \dots \quad (468)$$

$$\frac{d n}{d t} = 1 + u \left[(1 - \xi) + \frac{1}{13} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right) (1 - \xi^{13}) + \frac{1}{7} \frac{\tau_1}{\tau_0} \sin^2 i \frac{\sin \varepsilon'}{\sin 4 \varepsilon} (1 - \xi^7) \right] \quad (469)$$

Der Viskositätskoeffizient, der nach (468) in ε bzw. ε' steckt, tritt nur im letzten Gliede auf, das mit $\sin^2 i$ multipliziert ist. Nun war die Schiefe der Ekliptik, i , früher wahrscheinlich erheblich kleiner, der Einfluß des letzten Gliedes wuchs also im Laufe der Zeit.

In den ältesten Zeiten nach der Mondablösung kann die Wirkung der Sonne vernachlässigt werden, dagegen muß die Umlaufgeschwindigkeit des Mondes berücksichtigt werden, und es ist in dieser Periode

$$\tau_1 = 0; \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = \frac{19 (n - \Omega) \nu}{g r_0 w} \quad \dots \quad (470)$$

DARWIN teilte die ganze Zeit seit der Mondablösung in fünf Epochen, für die er folgende Werte annahm bzw. nach den Definitionen S. 547 fand (Werte zum Teil von PREY verbessert):

Tabelle 79

	Sterntag in mittlerer Zeit	Sider.Monat in mittleren Tagen	Schiefe i der Ekliptik	Entfernung r_0 des Mondes	ε	Zwischen- zeit t in Jahren
Heute	23 ^h 56 ^m	27,32	23° 28'	60,4	1,00	46 300 000
I	15 30	18,62	20 40	46,8	0,88	10 300 000
II	9 55	8,17	17 20	27,0	0,67	300 000
III	7 50	3,59	15 30	15,6	0,51	10 000
IV	6 45	1,58	14 25	9,0	0,39	
V	5 55	0,5	14 00	4,2	0,26	

ξ ist aus der Länge des siderischen Monats berechnet, zur Berechnung der Zeit t dient die Beziehung

$$\frac{d t}{d \xi} = \frac{u \xi^{12}}{\alpha^2 (W \sin 4 \varepsilon + \chi \sin 2 \varepsilon')} \quad \dots \quad (471)$$

wo

$$W = \frac{1}{2} \cos^2 i; \quad \chi = \frac{1}{2} \sin^2 i \cos i; \quad \alpha^2 = \frac{\tau_0^2}{g n_0}; \quad g = \frac{2 g}{5 r_0} \quad \dots \quad (472)$$

Für die früheste Zeit ($i = 0$) wird $W = \frac{1}{2}$, $\chi = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ und

$$\frac{d t}{d \xi} = \frac{2 u \xi^{12}}{\alpha^2 \sin 4 \varepsilon_1} \quad \dots \quad (473)$$

Man kann nun unter verschiedenen Annahmen von ν die Längen der verschiedenen Epochen berechnen. PREY fand so die in Tabelle 80 angegebenen Werte. Man erkennt, daß in jeder Epoche eine Minimaldauer bei einem bestimmten Wert von ν vorhanden war. Die kleinste Entwicklungsdauer ergibt sich unter der Annahme, daß ν von $0.8 \cdot 10^{15}$ zu Beginn der 4. Periode auf $2.2 \cdot 10^{15}$ heute zugenommen hat. Durch Addition der in Tabelle 80 unterstrichenen Werte ergibt sich für die Minimaldauer seit der Loslösung des Mondes 55.5 Millionen Jahre.

Tabelle 80

Länge der verschiedenen Epochen (Definition oben) im System Erde—Mond in Jahren unter verschiedenen Annahmen über den Viskositätskoeffizienten ν in Dyn/cm² nach PREY

ν angenommen	Länge der Epochen in Jahren				
	I	II	III	IV	V
$2.6 \cdot 10^{15}$	$4.59 \cdot 10^7$	$1.18 \cdot 10^7$	$4.25 \cdot 10^5$	$1.44 \cdot 10^4$	—
$2.4 \cdot 10^{15}$	$4.55 \cdot 10^7$	$1.14 \cdot 10^7$	$4.03 \cdot 10^5$	$1.36 \cdot 10^4$	—
$2.2 \cdot 10^{15}$	<u>$4.54 \cdot 10^7$</u>	$1.10 \cdot 10^7$	$3.81 \cdot 10^5$	$1.27 \cdot 10^4$	—
$2.0 \cdot 10^{15}$	$4.56 \cdot 10^7$	$1.07 \cdot 10^7$	$3.59 \cdot 10^5$	$1.18 \cdot 10^4$	—
$1.8 \cdot 10^{15}$	$4.64 \cdot 10^7$	$1.04 \cdot 10^7$	$3.41 \cdot 10^5$	$1.11 \cdot 10^4$	—
$1.6 \cdot 10^{15}$	$4.78 \cdot 10^7$	$1.03 \cdot 10^7$	$3.22 \cdot 10^5$	$1.03 \cdot 10^4$	—
$1.4 \cdot 10^{15}$	$5.02 \cdot 10^7$	<u>$1.02 \cdot 10^7$</u>	$3.07 \cdot 10^5$	$9.51 \cdot 10^3$	—
$1.2 \cdot 10^{15}$	$5.41 \cdot 10^7$	$1.04 \cdot 10^7$	$2.97 \cdot 10^5$	$8.99 \cdot 10^3$	—
$1.0 \cdot 10^{15}$	$6.03 \cdot 10^7$	$1.09 \cdot 10^7$	<u>$2.93 \cdot 10^5$</u>	$8.53 \cdot 10^3$	—
$0.8 \cdot 10^{15}$	$7.05 \cdot 10^7$	$1.21 \cdot 10^7$	$2.98 \cdot 10^5$	<u>$8.31 \cdot 10^3$</u>	—
$0.6 \cdot 10^{15}$	$8.91 \cdot 10^7$	$1.45 \cdot 10^7$	$3.27 \cdot 10^5$	$8.70 \cdot 10^3$	$2.64 \cdot 10^2$
10^{14}	$4.98 \cdot 10^8$	$7.43 \cdot 10^7$	$1.45 \cdot 10^6$	$3.38 \cdot 10^4$	$1.12 \cdot 10^3$
10^{13}	$4.96 \cdot 10^9$	$7.38 \cdot 10^8$	$1.43 \cdot 10^7$	$3.52 \cdot 10^5$	$1.09 \cdot 10^4$

Dieser Zeitpunkt würde nach den Ergebnissen über die Länge der geologischen Epochen (vgl. S. 203) etwa in die Kreidezeit fallen, also wesentlich früher sein, als man nach den Ergebnissen über die Änderungen der Erdkruste erwarten kann. Ein Vorgang wie die Ablösung des Mondes müßte ganz andere Spuren hinterlassen haben, als man sie zu jenen Zeiten findet. Andererseits sind die Werte für ν in den letzten Epochen zweifellos höher gewesen. Für die Zeit, welche seit der Ablösung des Mondes verflossen ist, erhält man größere Werte, wenn man für ν größere Werte voraussetzt, und zwar wächst die Zeit schließlich etwa proportional ν . Für ν zwischen 10^{17} und 10^{18} , also die Werte, die wir heute für das Material der Erdkruste in den obersten Schichten finden, wird die Epoche I von der Größenordnung 10^9 Jahre, für $\nu = 10^{19}$ — 10^{20} wird die Epoche I von der Größenordnung 10^{11} Jahre. Dies ist nun mehr, als wir nach den Untersuchungen über das Alter der Erde, das zwischen 10^9 und 10^{10} Jahren gefunden wurde, erhalten dürfen. Es folgt also hieraus, daß entweder die DARWINsche Theorie der Mondloslösung falsch ist, oder, daß der Viskositätskoeffizient in der Erdkruste selbst in den letzten Epochen unter 10^{19} lag. Da wir nach den folgenden Ergebnissen andererseits kaum annehmen dürfen, daß ν wesentlich unter 10^{19} liegt und sich auch in den letzten Epochen wohl kaum viel geändert hat, würde hieraus folgen, daß die Loslösung des Mondes zu der Zeit stattfand, von der wir die ältesten Gesteine feststellten. Es hatte also damals eine solche Katastrophe stattgefunden, daß uns die Folgezeit als „Entstehung der Erdkruste“ erscheint.

Kehren wir nun wieder zu unserem Ausgangsproblem zurück: Liefert die Gezeitenreibung unter irgendwelchen Annahmen über die Viskosität eine Verschiebung der Kontinente von der Größenordnung, wie sie für die WEGENERSche Theorie erforderlich ist? Die Westverschiebung der Kontinente in der Breite φ durch die Flutreibung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\xi} &= \frac{19}{20} \left(\frac{\tau}{g} \cos 2\varepsilon_1 \right)^2 (n - \Omega) \sin^2 (90 - \varphi) \\ &= \frac{19}{10} \frac{n_0 (n - \Omega) \nu}{g \sin 4\varepsilon_1} \cos^2 2\varepsilon_1 \sin^2 (90 - \varphi) \quad (474) \end{aligned}$$

und speziell in den Anfangszeiten ($n = \Omega$) aus

$$\frac{dL}{d\xi} = \frac{5}{40} \frac{u n_0 r_0^2 w}{\nu} \sin^2 (90 - \varphi) \quad (475)$$

Eine nennenswerte Verschiebung ergibt sich nur für kleine Werte von ν , und zwar fand PREY für $d\xi = 0,02$ im Äquator folgende Werte von dL in Graden:

$\frac{\xi}{\nu}$	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,24
$0,6 \cdot 10^{15}$	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,15	0,16	0,16
10^{14}	0,99	0,97	0,96	0,94	0,92	0,88	0,81	0,94	0,94
10^{13}	9,9	9,7	9,6	9,4	9,2	8,8	8,1	9,4	9,4

Zwischen 0,5 und 0,4 machen die Werte einen Sprung, der lediglich von der Änderung des Formelsystems (474) in (475) herrührt und unwesentlich ist. Man erkennt, daß nur dann eine brauchbare Lösung möglich ist, wenn ν verhältnismäßig sehr klein war. Bei den Werten, wie wir sie heute beobachten (vgl. Tabelle 74; wir müssen danach mit einer Größenordnung von mindestens 10^{17} rechnen), wäre keine merkliche Verschiebung der Kontinente durch die Flutreibung möglich (vgl. auch Band 3). PREY kommt zu folgendem Ergebnis:

„Eine brauchbare Lösung erhält man offenbar, wenn man annimmt, daß in ältesten Zeiten die Viskosität sehr gering, etwa von der Größenordnung 10^{13} oder 10^{12} war. Es konnte sich dann in der kurzen Zeit von wenigen 100 000 Jahren eine bedeutende Kontinentalverschiebung entwickeln. Später hat sich dann die Erde stark verfestigt, und die weitere Entwicklung in der Dauer von etwa 50—60 Millionen Jahren ist dann von keiner wesentlichen Verschiebung mehr begleitet. Wir können also die Resultate dahin zusammenfassen, daß auf Grund der DARWINSchen Theorie Kontinentalverschiebungen wohl möglich sind. Sie liegen aber mindestens 50 bis 60 Millionen Jahre hinter uns und sind nur dann bedeutend, wenn man für die frühere Zeit eine Viskosität von der Ordnung 10^{13} annehmen darf.“

Ziehen wir nun aber noch die Tatsache in Betracht, daß auch in der Neuzeit Fließbewegungen festgestellt werden (vgl. Band 3), so werden wir doch schließen müssen, daß die Flutreibung nicht die Ursache der früheren Kontinentalverschiebungen war, denn einmal sind sie es heute nach der Theorie (Band 3) bestimmt nicht, und anderseits widersprechen die Werte, die sich dann für die Viskosität der Erde ergeben, den auf alle anderen Wegen gefundenen Ergebnissen. Schließlich ist es auch überaus unwahrscheinlich, daß die Kontinentalverschiebungen in einer so kurzen Zeit stattfanden, wie es diese Theorie erfordert.

Voraussetzung wie im vorigen Falle, setzt ferner $V = 9$ km/sec, Periode $T = 7$ sec, also $p = 1 \text{ sec}^{-1}$, so ergibt sich, daß im Erdkern ν höchstens $2 \cdot 10^9 \text{ cm}^2/\text{sec}$, also η höchstens 0,003 Sekunden ist.

JEFFREYS suchte dann weiter ν aus der Polbewegung zu folgern, indem er voraussetzte, daß in 30 Jahren keine Dämpfung merklich war, da andernfalls eine Abnahme der Amplituden hätte feststellbar sein müssen. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht überzeugend, da über die Energiequelle der Polbewegung keine so sicheren Ergebnisse vorliegen, daß man auf die Größe der Dämpfung schließen kann (vgl. Band 1). Unter der Annahme, daß keine Energie zugeführt wird, und daß keine Dämpfung vorhanden ist, wird (vgl. S. 479 und 491)

$$1 - \frac{\tau_0}{\tau} = qC = \text{etwa } \frac{1}{4} \quad (482)$$

wo C eine Konstante ist. Führt man Viskosität ein, so wird analog wie oben

$$1 - \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1}{4} (1 - cb) \quad (483)$$

Sei ferner ungedämpft $p = \frac{2\pi}{\tau}$, benutzen wir einen Tag als Zeiteinheit und setzen voraus, daß die Verschiebungen proportional cpt sind, so wird durch die Dämpfung

$$\frac{p\tau_0}{2\pi} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}cb = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{3}cb\right) = \text{etwa } \frac{2\pi}{\tau} \left(1 + \frac{1}{3}cb\right) \quad (484)$$

Der Dämpfungsfaktor ist

$$e^{-\frac{1}{3}bpt} \quad \text{oder} \quad e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\tau} + p^2 t\right)} \quad (485)$$

Nimmt man nun an, daß in 30 Jahren keine Dämpfung merklich war, eine Voraussetzung, die wie erwähnt unsicher zu sein scheint, so wird t mindestens $3 \cdot 10^8$ sec, also ν mindestens 10^{20} . Dieses Ergebnis zeigt aber, daß die Dämpfung der Erdbebenwellen nicht durch Viskosität, sondern durch innere Reibung der Teilchen zustande kommen muß, daß also nach S. 551 angenähert $\eta = 0,004$ Sekunden ist.

In diesem Falle ist, wenn wir die vermutlich relativ geringe Wirkung der sehr großen Viskosität (t sehr groß) vernachlässigen, nach (425) μ zu ersetzen durch $\left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right)$. Nun ist nach (433a) λ zu ersetzen durch $\left(\lambda - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial t}\right)$. In rein elastischen Medien haben die Spannungsgleichungen die Form (vgl. S. 445 und 446):

$$N_1 = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{usw.} \quad (486)$$

$$T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{usw.} \quad (487)$$

N = Normalspannung; T = Tangentialspannung; u, v, w = Verschiebungen parallel der x - bzw. y - und z -Achse, Θ = Volumenänderung. Wir erhalten nun in unserem Falle, falls wir berücksichtigen, daß $\eta = \mu \eta$,

$$N_1 = \lambda \Theta - \frac{2}{3}\mu \eta \frac{\partial \Theta}{\partial t} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad \text{usw.} \quad (488)$$

$$T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mu f \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \text{ usw.} \quad (489)$$

Dieser Ansatz wurde von SEZAWA weiter durchgeführt (vgl. Band 4), und zwar benutzte er die Koeffizienten μ' und λ' , wo nach unseren Ergebnissen (S. 533)

$$\mu' = \mu f = \eta; \quad \lambda' = -\frac{2}{3} \mu' \quad (490)$$

Es ergab sich, daß die Wellen immer länger und flacher werden, und zwar ist nach GUTENBERG im allgemeinen (vgl. Band 4)

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \alpha t; \quad T^2 = T_0^2 + \frac{\alpha \Delta}{V^3} \quad (491)$$

α = Konstante, Ω = Wellenlänge, T = Periode, Δ = Distanz, V = Wellengeschwindigkeit. GUTENBERG fand aus der Änderung der Periode T von Erdbebenwellen mit der Distanz, daß α von der Größenordnung $10^{10} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ ist, und daß ferner

$$\lambda' + 2 \mu' = \text{ca. } 0,6 \alpha.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \mu' &= \eta, \quad \lambda' = -\frac{2}{3} \eta \quad (\text{nach 433a}), \\ \frac{4}{3} \eta &= \text{ca. } 0,6 \alpha \end{aligned} \quad (492)$$

Somit ist $\eta = \text{ca. } \frac{1}{2} \alpha$, also von der Größenordnung $\frac{1}{2} \cdot 10^{10}$. Nun ist aber μ im Erdmantel von der Größenordnung $2 \cdot 10^{12}$ (vgl. Fig. 160 S. 477), nach (433a) ergibt sich also auf Grund der Zunahme der Wellenlänge bei der Fortpflanzung von Erdbebenwellen durch die Erde, daß $f = \eta : \mu$ von der Größenordnung $\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$ ist. Diese vorzügliche Übereinstimmung mit dem aus Absorptionsbetrachtungen von JEFFREYS gefundenen Wert und den Beobachtungen (Tabelle 72) spricht sehr für die Richtigkeit unserer Betrachtungen.

Setzen wir nunmehr auf Grund der Ergebnisse über die Dämpfung der Erdbebenwellen $f = 0,004$, so folgt für die Polbewegung in 30 Jahren

$$\frac{1}{3} p^2 t f = 4 \cdot 10^{-9} \quad (493)$$

das heißt, die Wirkung auf die Polschwankungen ist nach (485) unbedeutend.

Die Viskosität des Erdkörpers beeinflusst ferner die Gezeiten des Erdkörpers, deren Amplitude bei einer rein elastischen Erde proportional μ ist, bei Einführung von Viskosität nach (422) also proportional

$$1 - c \left(p f + \frac{1}{p t} \right),$$

wo $\frac{2\pi}{p}$ nunmehr ein halber Mond-Tag ist. Der Klammerausdruck gibt die Phasenverschiebung an. Das erste Glied ist $6 \cdot 10^{-7}$, das zweite kleiner als 10^{-5} . Führen wir diesen Wert in die Beziehung

$$N = \frac{8}{5} \pi \frac{f m r_0^4}{c^3} \rho H \sin 2 \varepsilon \quad (494)$$

ein, wo

- N = Moment der Verzögerung der Gezeiten durch den Mond,
- f = Gravitationskonstante,
- m = Mondmasse,
- r_0 = Erdradius,
- c = Entfernung Mond — Erde,

ρ = Erddichte,
 $H = 0.6 h$, h = Höhe der Gezeiten des Erdkörpers,
 2ε = Phasenverschiebung der Gezeiten gegenüber dem Himmelskörper,
 $2\varepsilon = p t + \frac{1}{p t}$ (siehe oben),

setzen wir ferner

C = Hauptträgheitsmoment der Erde = $0.334 M r_0^2$, wo
 M = Erdmasse,

so wird

$$\frac{N}{C} < 10^{-26} \text{ sec}^{-2} \quad (495)$$

Dieser Betrag verschwindet aber gegenüber der Gezeitenreibung des Meeres in flachen Teilen, die von der Größenordnung $N : C = 2 \cdot 10^{-22} \text{ sec}^{-2}$ ist.

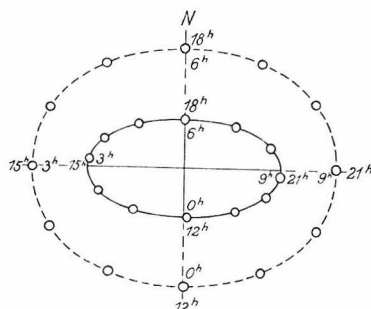


Fig. 180

Mittlere theoretische
 Lotbewegung für eine
 völlig starre Erde im
 Laufe eines Mondtages
 in Potsdam durch den
 im Äquator stehenden
 Mond (gestrichelt)
 und entsprechende
 beobachtete Kurve
 (ausgezogen)
 nach O. HECKER

Die Verlängerung des Tages durch die Gezeitenreibung durch die Meeresflut ist gegeben durch

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \frac{N + N_1}{C} \quad (496)$$

wo Ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde, N_1 = Moment der Verzögerung der Gezeiten durch die Sonne. Nach den oben getroffenen Voraussetzungen wäre $\frac{d\Omega}{dt} = -2.5 \cdot 10^{-22} \text{ sec}^2$. Ω ist gegenwärtig $7.3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$. Zur Änderung um 1 Sekunde sind also 120000 Jahre nötig. Nun ist es nach einer neuen Untersuchung von W. DE SITTER¹⁾ wahrscheinlich, daß die Tageslänge um etwa 0,003 Sekunden pro Jahrhundert zunimmt. Woher diese Verzögerung stammt, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen. Zur Änderung um 1 Sekunde wären also etwa 30000 Jahre nötig, also ein Viertel des Betrages, den JEFFREYS aus der Reibung der Meeresgezeiten fand. In früheren Epochen, als ν kleiner war, ergibt dagegen (496) die Verlangsamung der Erdrotation durch die Gezeiten des Erdkörpers.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Größenordnung von ν wäre die, daß man die Phasenverschiebung der Gezeiten des Erdkörpers gegenüber dem gezeitenregenden Gestirn mißt und hieraus nach (468) den Wert von ν bestimmt. Schon O. HECKER²⁾ fand, daß der Unterschied zwischen den für $\nu = \infty$ berechneten und den beobachteten Phasen sehr klein ist (Fig. 180). Eingehendere

¹⁾ Nature Nr. 3038, S. 99, Jan. 1928.

²⁾ Veröffentl. des Preuß. Geodät. Instituts, N. F. 32 und 49, 1907 bzw. 1911.

Untersuchungen rühren von W. SCHWEYDAR¹⁾ her. Tabelle 81 gibt einen Auszug aus seinen Rechnungen. Man erkennt, daß in der Tat die Unterschiede meist klein sind; wie SCHWEYDAR zeigte, sind sie im übrigen besonders in der Nord-südkomponente in erster Linie durch die Wirkung der Meeresgezeiten bedingt, welche die feste Erdkruste deformieren. SCHWEYDAR²⁾ stellte auch zuerst fest, daß in einer viskosen Erde das Pendel dem Gestirn vorauslaufen müßte, d. h. die in Tabelle 81 zusammengestellten Differenzen müßten negativ sein, wie man aus Figur 181 ohne weiteres erkennt: Das Pendel *A* folgt dem Gestirn sofort,

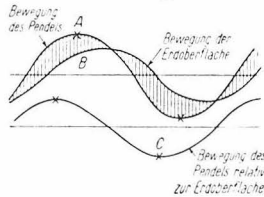


Fig. 181

A Bewegung eines Pendels infolge der wechselnden Anziehungskraft des Mondes, *B* Bewegung der Erdoberfläche (Gezeiten der Erdkruste), *C* Bewegung des Pendels relativ zur Erdkruste.

Nach B. GUTENBERG. Aus MÜLLER-POUILLETS, Lehrbuch der Physik, Band V, 1

die Erdbewegung wird verzögert, zur Beobachtung gelangt die Differenz der beiden Kurven, deren Null- und Extremwerte vor der Pendelkurve bzw. dem Standort des Gestirnes liegen.

Aus den Gleichungen (468) folgt ohne weiteres, daß einer beobachteten Verfrühung α der halbtägigen bzw. β der ganztägigen Flut folgende Viskositätskoeffizienten ν entsprechen, da $\alpha = \frac{1}{2} (2\varepsilon - 90^\circ)$, $\beta = \varepsilon' - 90^\circ$.

Beobachtete Differenz

α	bzw.	β	ν
0° 00'		0° 00'	∞
— 0° 46'	—	1° 32'	10^{18} CGS
— 2° 30'	—	4° 59'	10^{17}
— 34° 55'	—	69° 50'	10^{16}
— 43° 55'	—	87° 50'	10^{15}
— 44° 54'	—	89° 47'	10^{13}

Ein Vergleich dieser Werte α und β mit Tabelle 81 zeigt, daß ν mindestens von der Größenordnung 10^{17} CGS sein muß, also t mindestens 10^5 Sekunden, wahrscheinlich aber sogar mindestens 1 Jahr.

JEFFREYS verfolgte übrigens auch das System Erde-Mond, das uns hier weniger interessiert (Näheres in Band 1), eingehend, und kam für die Zeit, welche seit Loslösung des Mondes verflossen wäre, auf die Größenordnung von $4 \cdot 10^9$ Jahren, also die gleiche, wie wir sie S. 549 abschätzten.

Schließlich verwies JEFFREYS zuerst auf die Tatsache, daß die Senkung von Gebieten, welche durch Eis belastet wurden, und die nach dem Abschmelzen

¹⁾ Veröffentl. des Zentralbureaus der int. Erdmessung, N. F. 38, Berlin 1921.

²⁾ Veröffentl. des Preuß. Geodät. Instituts, N. F. 79, 1919.

des Eises bewirkte Hebung durch Entlastung darauf hindeuten, daß sich unterhalb der Erdoberfläche Schichten mit Viskositätskoeffizienten befinden, die *kleiner als die zuletzt für die Erde als Ganzes gefundenen Werte* sind. Zu einer Überschlagsrechnung hierfür fehlen uns aber noch genügend sichere Angaben.

Tabelle 81

Unterschied a zwischen den beobachteten Gezeiten des Erdkörpers und der Stellung des Himmelskörpers nach W. SCHWEYDAR für verschiedene Partialtiden in Freiberg (Sachsen)

Tide	Komponente Ost—West (für eine starre Erde ist $a = 90^\circ$)		Komponente Nord—Süd (für eine starre Erde ist $a = 180^\circ$)	
	beobachtet	Differenz	beobachtet	Differenz
M_2	89,2 ^o	— 0,8	192,5 ^o	+ 12,5
S_2	85,4 ^o	— 4,6	148,9 ^o	— 31,1
K_2	92,7 ^o	+ 2,7	171,2 ^o	— 8,8
N	82,2 ^o	— 7,8	196,9 ^o	+ 16,9
K_1	91,6 ^o	+ 1,6	41,1 ^o	— 138,9
D	90,6 ^o	+ 0,6	353,1 ^o	+ 173,1
P	99,5 ^o	+ 9,5	71,0 ^o	— 109,0

§ 191. Zusammenfassung. Die Untersuchungen über die Viskosität des Erdinnern führen übereinstimmend zu dem Ergebnis, daß der Erdkörper als Ganzes einen Viskositätskoeffizienten von der Größenordnung von mindestens 10^{20} Dyn/cm² hat. Nach den spärlichen Untersuchungen in Laboratorien ist damit zu rechnen, daß die Viskosität der Gesteine an der Erdoberfläche etwas kleiner, vielleicht etwa 10^{18} im Durchschnitt ist. Durch Temperaturerhöhung wird die Viskosität erheblich verkleinert, durch Druckerhöhung dagegen vergrößert. Da mit zunehmender Tiefe die Temperatur immer langsamer zunimmt und schließlich wohl fast konstant wird, während sich die Druckerhöhung bis in ganz wesentlich größere Tiefen erstreckt, ist damit zu rechnen, daß die Viskosität mit der Tiefe erst abnimmt, aber bereits in rund 50 km Tiefe ihr Minimum erreicht und unter der vorherrschenden Wirkung des Druckes erst schneller, später wieder langsamer zunimmt. Die Ergebnisse über die Niveauänderungen von Teilen, die durch Eis belastet oder später wieder entlastet wurden, sprechen ebenfalls hierfür.

Beim Übergang von der kristallinen Erdkruste zum glasigen Erdinnern ist bei den dort herrschenden Drucken keine wesentliche Änderung der Viskosität zu erwarten.

Bei der Anwendung der Ergebnisse auf Vorgänge in der Erdkruste oder im Erdinnern ist zweierlei zu beachten: Zunächst setzen unsere Ergebnisse voraus, daß es sich um homogene Körper handelt. Befinden sich irgendwo in der kristallinen Erdkruste Unstetigkeitsflächen zwischen zwei verschieden gebauten Schichten, so sind dort Bewegungen durch Gleiten viel leichter möglich als solche durch Fließen. Andererseits können Fließbewegungen nur eintreten, wenn der Fließwiderstand (strength) überschritten ist. Dieser beträgt an der Erdoberfläche etwa 10^9 Dyn/cm², nimmt aber mit wachsender Tiefe ab und ist in glasigen Substanzen anscheinend auch bei hohen Drucken praktisch Null. Doch bedarf gerade dieses Problem, wie im übrigen mehr oder minder alle in diesem Abschnitt behandelten Fragen, noch eingehender Prüfung.

Nicht mit der seither besprochenen Viskosität zu verwechseln ist die Eigenschaft vieler, besonders kristalliner Körper, daß sie bei Eintreten einer Spannung

infolge innerer Reibung nicht sofort die bei reiner Elastizität sich ergebende Endform annehmen, sondern dazu eine gewisse Zeit benötigen. Man bezeichnet diese Eigenschaft als „innere Reibung“ oder „Firmo-Viskosität“. Ihre Wirkungsweise ist völlig von der Wirkung der Viskosität verschieden. Praktische Bedeutung hat sie bei den bis jetzt untersuchten Problemen nur bei der Fortpflanzung von elastischen Wellen, bei denen sie einmal Schwächung und dann Änderung der Wellenform hervorruft.

Kapitel 19

Der Aufbau der Erde (Zusammenfassung)

§ 192. Der Aufbau des Erdkörpers. Die Erdbebenwellen zeigen uns, daß die Erde aus vier Teilen besteht, der äußersten etwa 50 km dicken Kruste, die wir in § 193 näher betrachten wollen, dem Mantel bis 1200 km Tiefe, der Zwischenschicht bis 2900 km Tiefe und dem Kern. Der Übergang vom Mantel zur Zwischenschicht erfolgt stetig, von dieser zum Kern unstetig. Die Betrachtung der Dichte in der Erde zeigt uns, daß diese zweifellos im Kern erheblich höher ist als im Mantel.

Dies Ergebnis entspricht den auf Grund geochemischer Betrachtungen gewonnenen Ergebnissen von V. M. GOLDSCHMIDT, wonach sich die Substanz der Erde ähnlich wie das Erz im Hochofen in drei Schichten geteilt hat: das Metall des Erdkernes, die Zwischenschicht, welche dem Stein im Hochofen entspricht, und die „Schlacke“ des Mantels (vgl. S. 43ff.).

Während über die Zusammensetzung des Kernes keine erheblichen Meinungsverschiedenheiten mehr bestehen und ziemlich allgemein angenommen wird, daß er aus Nichteisen (etwa 90% Eisen, etwa 10% Nickel, etwas Cu und Co) besteht, gehen die Ansichten über die Zwischenschicht weit auseinander. Von ADAMS wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die Zwischenschicht als Übergang vom Mantel zum Kern eine Mischung von Silikaten mit Eisen darstelle, das nach innen zu immer stärker in Erscheinung tritt, bis an der Kerngrenze nur noch Metall vorhanden ist. Wahrscheinlich aber handelt es sich bei der Zwischenschicht um Sulfide und Oxyde, von denen erstere überwiegen. Ein größerer Eisengehalt (nach TAMMANN 20%) ist dadurch nicht ausgeschlossen.

Wie wir sahen, ist es sehr wahrscheinlich, daß sich der Erdkern wie eine Flüssigkeit verhält. Über die Deutung dieses Ergebnisses gehen die Ansichten auseinander. Es ist dies aber auch nicht verwunderlich, da man über das Verhalten von Materie bei einer Temperatur von einigen tausend Grad und einem Druck von drei Millionen Atmosphären nichts aussagen kann. Daß der Erdkern einfach „geschmolzen“ ist, ist nicht wahrscheinlich. Einmal können wir annehmen, daß die Grenze zwischen geschmolzenem und kristallinem Material in einer Tiefe von nicht ganz 100 km liegt, andererseits dürfte bei einem Druck von drei Millionen Atmosphären überhaupt kein Unterschied zwischen Schmelze und Kristall vorhanden sein, der sich irgendwie bei den von uns betrachteten Problemen äußert.

Wir haben also vermutlich die Kerngrenze als eine Grenze zwischen zwei Zuständen zu betrachten, die tiefergehende Unterschiede zeigen, als es die Unterschiede zwischen den Aggregatzuständen bei normalen Temperaturen sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß in der in Frage kommenden Tiefe die Temperatur sich kaum erheblich ändern dürfte, während der Druck nur noch relativ langsam zunimmt. Aus diesem Grunde scheint eine wesentliche Materialänderung an

der Kerngrenze wahrscheinlich. Das Material des Mantels verhält sich noch wie an der Erdoberfläche, das Material des Kernes zeigt unter den gleichen Temperaturen und Drucken einen völlig anderen Zustand. Es kommt noch hinzu, daß nach den Ergebnissen über das Verhalten der Erdbebenwellen an der Kerngrenze diese außerordentlich scharf ausgeprägt sein muß.

Zur Deutung des Verhaltens des Erdkernes nahmen u. a. WIECHERT und LINCK an, daß die Moleküle dort geringere Verbindung untereinander zeigen als an der Erdoberfläche, bzw. daß der Erdkern sogar aus einzelnen, nicht zu Molekülen vereinigten Atomen besteht; dies wäre dann die Ursache für die geringe Rigidity. Dagegen besitzt der Kern eine wesentlich höhere Viskosität, als sie Flüssigkeiten unter normalen Drucken zukommt, wie die verhältnismäßig geringe Schwächung der Erdbebenwellen im Erdkern zeigt (vgl. S. 551).

Völlig verschieden vom Erdkern ist die Zwischenschicht, in der wir eine Starrheit gegen Volumen- und Formänderung finden, die ein Vielfaches der Werte für die Erdoberfläche beträgt. Auch die Viskosität ist erheblich höher als in der Erdkruste. Andererseits ist es nicht ausgeschlossen, daß der Fließwiderstand (strength) sehr klein ist. Die elastischen Konstanten der Zwischenschicht und der tieferen Teile des Mantels bewirken in erster Linie die große Starrheit und Viskosität der Erde, während der Erdkern die mittlere Dichte der Erde wesentlich erhöhen muß.

Über den Aggregatzustand der Zwischenschicht sagen unsere Beobachtungen nichts aus. Die thermischen Betrachtungen (vgl. S. 33ff.) sprechen vielleicht eher dafür, daß das Material geschmolzen als daß es kristallin ist. Unter den herrschenden Drucken verhält es sich gegenüber Kräften irgendwelcher Art vermutlich in beiden Fällen gleich. Dagegen sprechen die Tatsache der Isostasie und damit verknüpfte Bewegungen der Erdkruste für einen geringen Fließwiderstand und damit für eine Schmelze.

Bei der Betrachtung des Mantels wollen wir, wie schon oben angegeben, von der „Erdkruste“ zunächst absehen. Der Mantel wird von Silikaten gebildet, die sich nach GOLDSCHMIDT in einem Zustand besonderer Kompression befinden (Eklogite) und die nach außen in basaltähnliches Material übergehen. Die Dichte nimmt im Mantel vorwiegend durch die Druckerhöhung zu; in der Zwischenschicht tritt hierzu noch die Wirkung der Materialänderung. Auch im Mantel ist der Widerstand gegen Form- und Volumenänderung erheblich höher als in der Erdkruste, besonders in den tieferen Teilen. Dagegen erscheint es nicht ausgeschlossen, daß die Zähigkeit in den obersten Schichten des Mantels etwas geringer als an der Erdkruste ist. Der Mantel ist in seinen tieferen Teilen wahrscheinlich amorph, die Grenze zwischen kristallinem und amorphem Material ist noch nicht sicher festgestellt; am wahrscheinlichsten ist die Annahme, daß sie in etwa 60—70 km Tiefe liegt. Große Änderungen sind an ihr allerdings nicht zu erwarten, da bei dem Druck von fast 20000 Atm., welcher dort herrscht, ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Aggregatzuständen lediglich hinsichtlich der Anordnung der Moleküle bestehen dürfte, welche für die bisher behandelten geophysikalischen Erscheinungen belanglos ist, während die übrigen, insbesondere die elastischen Eigenschaften der Substanzen bei solchen Drucken nicht mehr erheblich durch den Schmelzvorgang beeinflusst zu werden scheinen.

§ 193. Allgemeines über den Aufbau der Erdkruste. In den tieferen Schichten der Erde konnten wir die Materie als völlig gleichartig innerhalb der Niveauflächen annehmen. In der Erdkruste ist dies jedoch nicht mehr der Fall. Eine bestimmte Grenztiefe, in welcher die Unterschiede innerhalb der Niveauflächen aufhören, läßt sich nicht angeben. Während wir in den oberen Teilen des Mantels erhebliche Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht

haben, zeigt die Tatsache der angenäherten Isostasie, daß in der Tiefe weitgehender Ausgleich von Spannungen möglich ist. Dies ist bei den in Frage kommenden Drucken wohl nicht eine Folge abnehmender Viskosität, sondern abnehmenden Fließwiderstandes.

Auch die Temperaturverteilung ist in den obersten Erdschichten sehr verschieden (vgl. S. 2ff.), und mit der Tiefe nehmen diese Unterschiede mindestens bis 2 km Tiefe zu. Es kommt hierzu noch der Unterschied zwischen Kontinenten, wo in 10 km Tiefe Temperaturen von der Größenordnung 300° zu erwarten sind, und den Ozeanböden, wo in der gleichen Tiefe vereinzelt 0° herrschen. Immerhin wird die Niveauläche größter Temperaturunterschiede wohl kaum allzu tief zu suchen sein, und wir können annehmen, daß in größerer Tiefe in den Niveaulächen keine erheblichen Temperaturunterschiede mehr vorkommen. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß kleine Unterschiede dadurch zustande kommen, daß die Temperatur im Erdinnern bei Fehlen von Störungen auf Flächen gleicher Distanz von der Erdkruste konstant sein müßte, daß dagegen der Abstand der Niveaulächen etwas von der geographischen Breite abhängt.

Die Ursache der Temperaturverschiedenheiten innerhalb der Niveaulächen der Erdkruste kann von verschiedenen Ursachen herrühren. Maßgebend für den Abkühlungsvorgang (vgl. S. 24ff.) sind die Schmelztemperatur der Gesteine, die Schmelzpunktserhöhung durch den Druck, die Wärmeleitfähigkeit, die spezifische Wärme sowie das Vorhandensein von Wärmequellen. Der letztere Faktor bewirkt vor allem lokale Änderungen der geothermischen Tiefenstufe, aus denen sogar umgekehrt auf den Aufbau geschlossen werden kann („thermische Aufschlußmethode“). Insbesondere ist der Gehalt der verschiedenen Teile der Erdkruste an radioaktiven Substanzen sehr verschieden, so daß hierdurch ein erheblicher Teil der Temperaturunterschiede erklärt werden dürfte.

Überhaupt spielt die Temperatur in der Erdkruste eine viel größere Rolle als in anderen Teilen des Erdkörpers. Während sich in größerer Tiefe die Temperatur nur noch wenig ändert, und die Änderungen im Aufbau in erster Linie durch die Schwere und den Druck bedingt werden, kommt in der Erdkruste und in den oberen Schichten des Mantels die Temperatur als wesentlicher Faktor hinzu, der insbesondere die elastischen Eigenschaften der Substanzen beeinflusst.

Aber alle diese Unterschiede genügen nicht, um die großen Unterschiede zwischen den Eigenschaften des Materials der Erdkruste zu erklären. Man wird vielmehr zu der Annahme gedrängt, daß die sehr verschiedenartigen Gesteine, die am Aufbau der Erdkruste beteiligt sind, zwei wesentlich verschiedenen Klassen angehören, die man als „Sial“ und „Sima“ bezeichnete. Ihre Haupt-eigenschaften sind:

	Sial	Sima
Vorwiegende Bestandteile . . .	Silizium, Aluminium	Silizium, Magnesium
Relative Reagenz	saurer	basischer, besonders in der Tiefe
Spezifisches Gewicht	kleiner (2,7 bis 3,0)	größer (> 3,0)
Kompressibilität	größer	kleiner
Righeit	kleiner	größer
Zähigkeit vermutlich . . .	kleiner	größer

Infolge des geringen spezifischen Gewichtes muß im allgemeinen das sialische Material über simatischem liegen; aus verschiedenen Gründen, die wir in den folgenden Paragraphen erörtern werden, erscheint es jedoch sehr wahrscheinlich, daß im Pazifischen Ozean Simagesteine bis dicht an den Meeresboden reichen,

vielleicht diesen sogar direkt bilden, während in den Kontinenten eine rund 50 km dicke Sialschicht die oberste Kruste bildet. Im Atlantischen Ozean und vielleicht auch in den übrigen Ozeanen scheint eine dem kontinentalen Sial ähnliche Schicht, mit etwas größerem spezifischen Gewicht — das letztere schwankt ja überhaupt (vgl. Tabelle 45 S. 459) —, mit einer durchschnittlichen Dicke von etwa 20 km über Sima zu liegen. Daß tatsächlich verschiedene Niveaus auf der Erdkruste vorherrschen, zeigt die hypsometrische Kurve der Erdoberfläche (Fig. 182), welche angibt, welche Gebiete der dem Meeresspiegel benachbarten Niveauflächen von fester Masse gebildet werden und welche von Wasser (unter dem Meeresspiegel) bzw. von Luft (Näheres in Band I). Schon aus dieser Darstellung

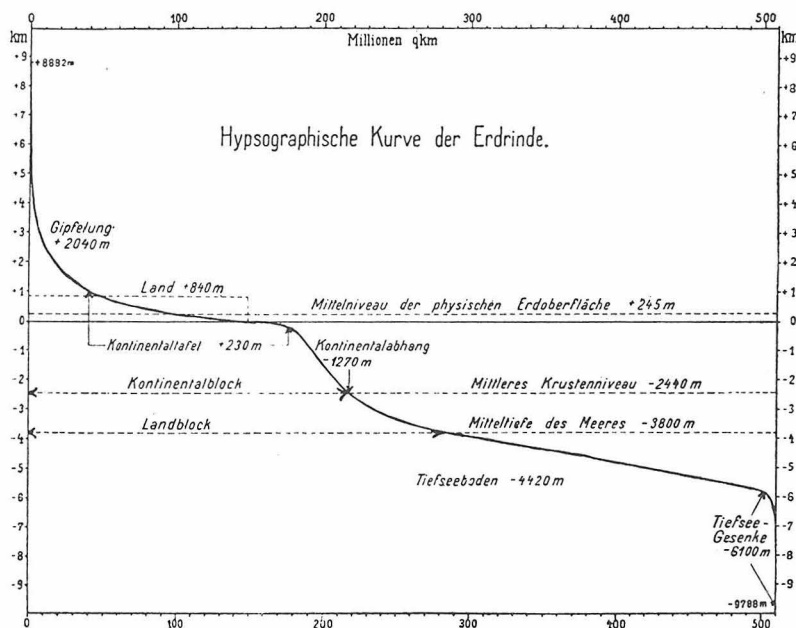


Fig. 182

Hypsographische Kurve nach KOSSINNA.

Sie gibt an, wieviel Millionen Quadratkilometer (Abszissen) in den verschiedenen Niveauflächen (Ordinaten, 0 = Meeresspiegel) von festem Material gebildet werden.

Der Rest der Niveauflächen besteht in erster Annäherung aus Luft (über 0) oder Wasser (unter 0)

erkennt man das Vorherrschen von zwei Niveaus. Noch deutlicher ist dies in Fig. 183 nach A. WEGENER, in welcher die Häufigkeit der einzelnen 100-m-Höhenstufen eingetragen ist. Wäre die Erdkruste überall aus dem gleichen Material, so müßten die beobachtbaren Höhen dem GAUSSschen Fehlergesetz gehorchen, das in Fig. 183 gestrichelt eingezeichnet ist. Das Vorhandensein der beiden ausgesprochenen Maxima weist auf zwei physikalisch verschiedene Niveaus der Erdkruste hin. Das obere, etwas über Null im Mittel, ist die Oberfläche der Kontinentalblöcke, des sialischen Materials, das untere entspricht der durch die Isostasie bedingten Gleichgewichtsfläche, die durch die Simaoberfläche mit mehr oder minder dicken aufgesetzten Sialteilen hervorgerufen wird.

Eine plausible Erklärung für die Entstehung dieser beiden Häufigkeitsmaxima der Höhen bildet die in Band 3 ausführlicher dargestellte Ansicht von

GUTENBERG über die Entstehung der Kontinentalblöcke: Bei der Loslösung der Mondmasse von der Erde wurde ein Teil der sialischen Massen entfernt und durch von unten nachströmendes Sima mit anderem Niveau bis zur Herstellung des isostatischen Gleichgewichtes ersetzt: zum Teil wird auch Sial seitlich zugeflossen sein. Der hierbei entstandene Zustand brachte zwar isostatisches, aber kein hydrodynamisches Gleichgewicht der obersten Schichten. Dieses sucht sich seit der Mondablösung herzustellen. Die darauf hinwirkenden Bewegungen haben zur Folge, daß die hypsographische Kurve immer flacher wird. Das hydrodynamische Gleichgewicht, dem eine horizontale Linie als hypsographische Kurve und eine gleichmäßige Überflutung der Erdoberfläche entspricht, kann natürlich infolge der inneren Reibung der Substanz nie erreicht werden.

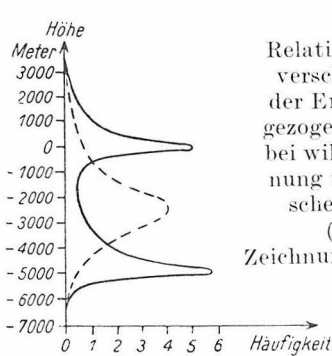


Fig. 183
Relative Häufigkeit der
verschiedenen Höhen
der Erdoberfläche (aus-
gezogen) und Verteilung
bei willkürlicher Anord-
nung nach dem GAUSS-
schen Fehlergesetz
(gestrichelt).
Zeichnung von A. WEGENER

§ 194. Der Aufbau der Kontinente, insbesondere Europas. Die Hauptanhaltspunkte zur Erkenntnis des Aufbaues der obersten Erdschichten liefern uns zweifellos die Untersuchungen über die Erdbebenwellen, und zwar sowohl die der Vorläufer wie die der Oberflächenwellen, über die S. 455ff. Angaben gemacht wurden. Aus den Geschwindigkeiten der Erdbebenwellen finden wir dann zunächst die Inkompressibilitätsfaktoren und Righeitsmoduln in den verschiedenen Gebieten und Tiefen. Aus den Tabellen 51 und 62 können wir die in Frage kommenden Werte, und aus den Angaben S. 455ff. die zugehörigen Schichttiefen entnehmen.

Tabelle 82

Inkompressibilitätsfaktoren k und Righeitsmoduln μ in Dyn/cm² für verschiedene Gebiete. Die Werte für k und μ sind mit 10^{11} zu multiplizieren. Tiefenangaben abgerundet in km.
Schicht a = oberste Schicht

	Schicht b			Schicht c			Schicht d		
	Tiefe	k	μ	Tiefe	k	μ	Tiefe	k	μ
Norddeutschland.	3—10	6	?	10—40	$8\frac{1}{2}$?	> 40	12	?
Süddeutschland .	3—30	5	$2\frac{3}{4}$	30—40	8	$3\frac{1}{2}$	> 40	12	$6\frac{1}{2}$
Japan	3—30	4	$2\frac{3}{4}$	30—40	6	4	> 40	12	$6\frac{1}{2}$
Pazifischer Ozean	gering	(8)	(5)	> 5	11	6	stetig an c	12	$6\frac{1}{2}$

In Tabelle 82 sind diese Ergebnisse zusammengestellt. Vergleichen wir diese Werte mit den in Gesteinen beobachteten, so finden wir, daß die niedersten

Werte in der Schicht *b* immer noch etwas über den höchsten im Laboratorium beobachteten Werten für Granit liegen. Bei höherem Druck und höherem SiO_2 -Gehalt ergibt sich allerdings bessere Übereinstimmung. So ist nach ADAMS und WILLIAMSON (vgl. S. 516) der Wert für *k* bei

	SiO_2 Proz.	Bei 2000 Atm. Druck (in etwa 7 km Tiefe)	10000 Atm. Druck (in etwa 35 km Tiefe)
Washington-Granit	67,5	4,4	5,6
Westerly-Granit	72,7	5,0	5,3
Stone Mt.-Granit	71,7	5,1	5,5

Man wird also die in Süddeutschland beobachteten Wellengeschwindigkeiten in der Schicht *b* unbedenklich einem granitartigen Gestein zuschreiben können. Schwieriger läßt sich diese Frage für Norddeutschland entscheiden. R. A. DALY wies, wie erwähnt (vgl. S. 521), darauf hin, daß bei der üblichen Bestimmung des Inkompressibilitätsfaktors im Laboratorium (vorstehende Tabelle) relativ hohe Drucke zur Anwendung kommen, welche für *k* zu kleine Werte ergeben, und daß die wahren Inkompressibilitätsfaktoren für kleine Spannungen, wie sie bei den Erdbebenwellen fern vom Herde vorkommen, durchschnittlich rund 15 % größer sind, als die Laboratoriumsuntersuchungen ergaben, doch scheint dies mindestens nicht in dem vermuteten Maße der Fall zu sein. ADAMS und GIBSON vermuten, daß der hierdurch bedingte Unterschied 4 % nicht erreicht.

Auch die berechneten Werte für μ liegen etwas über den im Laboratorium für Atmosphärendruck beobachteten Werten von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2} \cdot 10^{11}$ CGS für Granit (vgl. S. 474, jedoch auch Tabelle 50b S. 475).

Die Schicht *c* wurde im allgemeinen mit Basalt identifiziert, in welchem $k = 4$ bis $5 \cdot 10^{11}$ CGS für 1 Atm. und $6\frac{1}{2} \cdot 10^{11}$ CGS bei 10000 Atm. (in etwa 35 km Tiefe) gefunden wurde, also in guter Übereinstimmung mit dem Werte für *k* in der Schicht *c*; Beobachtungen über die Richtigkeit von Basalt fehlen. Eine andere Deutung gab DALY (a. a. O.). Er wies darauf hin, daß verschiedene Modifikationen von Quarz existieren, darunter α - und β -Quarz, von denen der β -Quarz, der bei höherer Temperatur stabiler ist als der α -Quarz, wesentlich weniger (rund die Hälfte) kompressibel ist als dieser. Da Granit im allgemeinen etwa 25 bis 30 % Quarz enthält, wäre in der Tiefe ein Übergang von Granit mit α -Quarz in solchen mit β -Quarz und geringerer Kompressibilität zu erwarten und hierdurch die Schichtgrenze bedingt. Es wäre dann auch ganz plausibel, daß sich die Alpen in der Tiefe nicht bemerkbar machen. Möglicherweise erklärt sich auch die größere Wellengeschwindigkeit in Norddeutschland auf ähnliche Weise.

Auch das Material der Schicht *d* ist noch nicht eindeutig bestimmt. ADAMS und WILLIAMSON nahmen an, daß es sich um dunitartigen Peridotit handelt. Für Dunit ist *k* bei den in Frage kommenden Drucken etwa $11 \cdot 10^{11}$ CGS, entspricht also dem beobachteten Werte. Gabbro besitzt zu kleine Werte. Auch Peridotite und Eklogite wurden angenommen, da diese ebenfalls relativ geringe Kompressibilität besitzen. Abweichend hiervon vertrat DALY den Standpunkt, daß wir es mit einer basaltartigen Substanz (Plateaubasalt, 48,6 % SiO_2 ; 13,8 % Al_2O_3 ; 9,6 % CaO ; 9,6 % FeO ; 6,3 % MgO ; 3,4 % Fe_2O_3 u. a.) zu tun haben, in welcher etwa die beobachteten Werte für *V* und \mathfrak{B} zu erwarten sind. Die Ergebnisse über den Aufbau des Pazifischen Ozeans (S. 564) sprechen für DALYS Ansicht, und auch geochemische Erwägungen (vgl. S. 38) sprechen dafür. DALY

wies weiter darauf hin, daß auch in glasischem, amorphem Basalt in 70 km Tiefe etwa die gleiche Wellengeschwindigkeit zu erwarten ist wie in kristallinem, da die Änderung der elastischen Konstanten etwa durch die Änderung der Dichte kompensiert würde, so daß die Annahme, daß in etwa 70 km Tiefe der Übergang vom kristallinen in den amorphen Zustand erfolgt, durchaus statthaft ist.

Tabelle 83

Berechnete Geschwindigkeiten V in km/sec von Longitudinalwellen in verschiedenen Gesteinen nach ADAMS und GIBSON

Gestein	Druck Atm.	Entspr. Tiefe	V km/sec	Bemerkungen
Whin-Sill Diabas	10000	36 km	6,8	k und g beobachtet
Sudbury „	„	„	6,7	„
Pallisade „	„	„	6,6	„
Maryland „	„	„	7,2	„
Plateaubasalt	„	„	7,1	Mittelwert
Eklogit 50% Garnet, 30% Jadeit, 20% Diopit	7000	25 km	8,0	Entsprechend Chloro- metanit-Eklogit
Eklogit 42% Garnet, 6% Jadeit, 52% Diopit	„	„	7,7	Entsprechend Eklogit von Rødhangen u. a.
Eklogit 32% Garnet, 24% Jadeit, 44% Diopit	„	„	7,7	Entsprechend Eklogit von Silden u. a.

ADAMS und GIBSON berechneten hierauf aus den von ihnen gefundenen Werten für Kompressibilität und Dichte für die in Frage kommenden Gesteine die in Tabelle 83 zusammengestellten Werte. Die Verfasser halten hiernach Peridotit für diese Schicht als am wahrscheinlichsten, weniger wahrscheinlich bestände sie aus Eklogit und noch geringere Wahrscheinlichkeit besäße kristalliner Basalt. Basaltglas käme nicht in Frage. Das Problem, das vom geochemischen Standpunkt aus in Abschnitt II erörtert ist, bedarf aber weiterer Untersuchungen.

§ 195. Der Aufbau der Ozeanböden. Beobachtungen von Erdbebenwellen, welche im wesentlichen nur den Boden des Indischen Ozeans oder des Arktischen Meeres durchlaufen haben, sind bisher nur ganz vereinzelt veröffentlicht worden: sie scheinen zu ähnlichen Ergebnissen zu führen wie für den Atlantischen Ozean, so daß wir uns auf diesen und den Pazifischen Ozean beschränken können. Leider sind wir bei beiden fast nur auf die Untersuchungen an Oberflächenwellen angewiesen. (Näheres hierüber in Band 4 des Handbuches.)

1. Der Atlantische Ozean. Die Oberflächenscherungswellen, welche den Boden des Atlantischen Ozeans durchlaufen haben (vgl. S. 458), zeigen eine viel ausgesprochenere Dispersion als die Wellen in den Kontinenten. Da die Geschwindigkeit ganz kurzer und ganz langer Wellen etwa die gleiche ist wie in den Kontinenten, außerdem jedes Anzeichen für stärkere Extinktion fehlt, können wir mit großer Sicherheit den Schluß ziehen, daß der Übergang von allen Randkontinenten zum Ozeanboden stetig erfolgt, daß aber die oberste Schicht in ihm merklich dünner ist (Größenordnung: $\frac{1}{2}$ der Kontinente). Anzeichen für größere Gebiete, in denen die obere Schicht fehlt, sind nicht vorhanden. Ob das Material des Untergrundes im Atlantik der Schicht bis etwa

20 km Tiefe in den Kontinenten oder der darunter liegenden entspricht, läßt sich nicht entscheiden. Wir haben also unter dem Atlantischen Ozean zunächst eine rund 20 km dicke Schicht aus granitartigem Material, darunter das Sima, das wir uns genau wie unter den Kontinenten zusammengesetzt denken müssen (dunitartig bzw. peridotit-, pyroxenitartig nach der einen Auffassung, aus besonderen [Tiefen-] Basalten nach DALY).

2. *Der Pazifische Ozean.* Völlig abweichend vom Atlantischen Ozean verhält sich der Pazifische Ozean. Seine (physikalische) Begrenzung ist durch eine fast ununterbrochene Kette von Erdbeben- und Vulkangebieten gekennzeichnet; die wenigen Nahbebenbeobachtungen ergeben schon in relativ geringer Tiefe merklich höhere Wellengeschwindigkeiten als in den Kontinenten; beim Passieren der Küsten erleiden die Oberflächenwellen erhebliche Energieverluste, ein Zeichen für tiefreichende Schichtgrenzen; die mittlere Dichte des Bodens ist größer als an jeder anderen Stelle der Erde; die Geschwindigkeit von kurzen Oberflächenwellen ist in mehreren Fällen (z. B. Amerika—Honolulu) einwandfrei fast gerade so groß gefunden worden wie von langen Wellen, ein Beweis, daß keine große Änderung der Wellengeschwindigkeit mit der Tiefe vorhanden ist. Irgendwelche Anzeichen für eine Schichtgrenze fehlen. Damit kann natürlich nicht behauptet werden, daß eine dünne Oberflächenschicht fehlt, sie müßte allerdings im allgemeinen erheblich dünner sein als unter dem Atlantik. Andererseits könnte auch eine Schichtung aus zwei elastisch nicht sehr verschiedenen Materialien (z. B. Plateaubasalt über Eklogit) vorhanden sein. Im wesentlichen wird aber hiernach der Boden des Pazifik von „Sima“ gebildet. Vielleicht reichen vereinzelt Teile der Kontinente an den Rändern in den Ozean hinein.

Eine Stütze für diese Annahme bildet vielleicht die von H. H. TURNER¹⁾ gegebene Zusammenstellung derjenigen (seltenen) Erdbebenherde, die nach seiner Berechnung Herdtiefen von rund 300 km besitzen. Sie liegen im wesentlichen auf einem schmalen Ring, der von Teilen der Küsten des Pazifischen Ozeans gebildet wird, im allgemeinen jedoch nicht unter dem Ozean selbst. Die Annahme von TURNER, daß wir hier die Grenze des Gebietes vor uns haben, aus dem sich der Mond losgelöst hat, hat manches für sich. Diese Erdbeben mit großen Herdtiefen wären als Folgen von chemischen oder von Kristallisationsvorgängen (vgl. S. 23) an der alten Narbe aufzufassen.

¹⁾ Seismological Investigations, British Association, 35. Report, Section A, p. 2. Bristol 1930.